

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра строительных конструкций,
водоснабжения и водоотведения

Составитель Г. В. Широколов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические материалы
для студентов специальности СПО
23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей,
систем и агрегатов автомобилей

Рекомендовано цикловой методической комиссией
общепрофессиональных дисциплин
в качестве электронного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Кузнецов И. В., заведующий кафедрой строительных конструкций, водоснабжения и водоотведения

Ушакова Е. С., председатель цикловой методической комиссии общепрофессиональных дисциплин

Широколов Георгий Валентинович

Техническая механика: методические материалы [Электронный ресурс] для студентов специальности СПО 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей / сост. Г. В. Широколов; КузГТУ. – Кемерово, 2018.

Приведен теоретический и практический материал для проведения практических занятий и самостоятельной работы.

© КузГТУ, 2018

© Г. В. Широколов,
составление, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	7
Раздел 1. Теоретическая механика.....	8
1.1. Основные понятия статики.....	8
1.1.1. Классификация сил.....	8
1.1.2. Аксиомы статики.....	10
1.1.3. Основные виды связей и их реакции.....	11
1.1.4. Трение.....	13
1.2. Характеристики действия сил на тело.....	15
1.2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил.....	15
1.2.2. Алгебраический момент силы относительно центра.....	17
1.2.3. Пара сил.....	18
1.2.4. Момент силы относительно центра и пара сил как векторы.....	19
1.2.5. Момент силы относительно оси.....	21
1.2.6. Координаты центра тяжести тела.....	22
1.3. Условия равновесия систем сил.....	25
1.3.1. Равновесие системы сходящихся сил.....	25
1.3.2. Теорема о параллельном переносе силы (Пуансо)... ..	25
1.3.3. Равновесие произвольной плоской системы сил.....	26
1.3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил.....	29
1.4. Решение задач статики.....	30
1.4.1. Методика решения задач на равновесие систем сил.....	30
1.4.2. Система сходящихся сил.....	32
1.4.3. Произвольная плоская система сил.....	39
1.4.4. Центр тяжести однородного плоского тела.....	46
1.5. Основные понятия кинематики.....	49
1.5.1. Способы задания движения точки.....	50
1.5.2. Скорость и ускорение точки.....	51
1.5.2.1. Координатный способ.....	51
1.5.2.2. Естественный способ.....	53
1.5.3. Виды движения точки.....	55
1.6. Динамика материальной точки.....	57

1.6.1.	Законы динамики.....	57
1.6.2.	Импульс и работа силы.....	59
1.6.3.	Примеры вычисления работ сил.....	61
1.6.4.	Теоремы динамики материальной точки.....	63
	Раздел 2. Сопротивление материалов.....	65
2.1.	Растяжение и сжатие.....	65
2.1.1.	Внутренние усилия.....	65
2.1.2.	Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Коэффициент Пуассона.....	65
2.1.3.	Формула нормальных напряжений при растяжении – сжатии.....	67
2.1.4.	Пример.....	68
2.1.5.	Вопросы для самоконтроля.....	71
2.2.	Статически неопределимые системы при растяжении – сжатии.....	72
2.2.1.	Расчет статически неопределимых систем.....	72
2.2.2.	Расчет по разрушающим нагрузкам (предельному состоянию).....	73
2.2.3.	Пример расчета по допускаемым напряжениям.....	74
2.2.4.	Пример расчета по разрушающим нагрузкам.....	78
2.2.5.	Вопросы для самоконтроля.....	79
2.3.	Геометрические характеристики плоских сечений.....	80
2.3.1.	Площадь плоских сечений (фигур).....	80
2.3.2.	Статические моменты площади сечения. Центр тяжести сечения.....	81
2.3.3.	Моменты инерции сечений.....	82
2.3.4.	Положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции.....	84
2.3.5.	Последовательность (алгоритм) определения положения главных центральных осей инерции и величин главных центральных моментов инерции...	84
2.3.6.	Пример.....	85
2.3.7.	Вопросы для самоконтроля.....	88
2.4.	Расчет статически определимого жестко закрепленного бруса на кручение.....	90
2.4.1.	Определение внутренних усилий при кручении.....	90

2.4.2.	Определение напряжений при кручении и условие прочности.....	91
2.4.3.	Определение перемещений при кручении и расчет на жесткость.....	93
2.4.4.	Пример расчета бруса с постоянным поперечным сечением.....	95
2.4.5.	Вопросы для самоконтроля.....	100
2.4.6.	Задания для самостоятельного решения.....	100
2.5.	Изгиб прямых брусьев.....	102
2.5.1.	Общие понятия о деформации изгиба.....	102
2.5.2.	Определение внутренних усилий при прямом изгибе.....	102
2.5.3.	Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил.....	103
2.5.4.	Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	104
2.5.5.	Подбор сечения.....	104
2.5.6.	Пример.....	105
2.5.7.	Правила контроля эпюр Q и M.....	111
2.5.8.	Вопросы для самоконтроля.....	112
2.6.	Совместное действие кручения и изгиба.....	113
2.6.1.	Эквивалентные напряжения при действии изгиба с кручением бруса круглого поперечного сечения.....	113
2.6.2.	Вопросы для самоконтроля.....	115
2.7.	Устойчивость сжатых стержней.....	115
2.7.1.	Формула Эйлера для определения критической силы.....	116
2.7.2.	Определение критической силы за пределами пропорциональности. Формула Ясинского.....	117
2.7.3.	Расчёт на устойчивость по коэффициенту понижения φ допускаемого напряжения $[\sigma]$ —.....	118
2.7.4.	Пример.....	119
2.7.5.	Вопросы для самоконтроля.....	122
2.8.	Прочность при циклических нагрузках (усталость).....	123
2.8.1.	Переменные напряжения. Усталость.....	123

2.8.2.	Пример.....	125
2.8.3.	Вопросы для самоконтроля.....	129
Раздел 3.	Детали машин.....	130
3.1.	Задание на комплексную расчетно-графическую работу.....	130
3.2.	Выбор электродвигателя.....	131
3.3.	Кинематический расчет.....	132
3.4.	Расчет зубчатой пары на прочность.....	133
3.5.	Расчет зубчатой пары на прочность.....	138
3.6.	Предварительный подбор подшипников.....	139
3.7.	Выбор способа смазки.....	140
3.8.	Конструктивные размеры деталей редуктора.....	141
3.9.	Проверка долговечности подшипника.....	143
3.9.1.	Ведущий вал.....	143
3.9.2.	Ведомый вал.....	146
3.10.	Проверка прочности шпоночных соединений.....	150
3.11.	Проверочный расчет на выносливость.....	152
3.11.3.	Ведущий вал.....	154
3.11.4.	Ведомый вал.....	155
3.12.	Посадки зубчатого колеса и подшипников.....	157
	Приложения.....	158
	Литература.....	180

ВВЕДЕНИЕ

Механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение: способствует развитию логического мышления, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движущейся материи – механическому движению. Дисциплина «Техническая механика» является базой для создания надежных и экономичных конструкций, как на стадии проектирования, так и при изготовлении и эксплуатации. К основным задачам этого предмета относится изучение:

- общих законов равновесия материальных тел;
- методов расчета элементов конструкций и машин на прочность, жесткость и устойчивость;
- законов движения материальных тел;
- устройства машин и механизмов, их деталей и области их применения.

Методическое указание состоит из трех разделов, включающих основы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин.

Изучение методов и приемов технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. На базе минимального количества материала студенту сообщаются такие знания, которые позволяют ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Для изучения курса нужно иметь соответствующую математическую подготовку. Необходимо использовать положения и методы векторной алгебры, уметь дифференцировать функции одной переменной, знать основы теории кривых второго порядка, находить интегралы от простейших функций, решать дифференциальные уравнения.

В методическом указании приведены примеры решения типовых задач по всем разделам. Решения задач сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студенту при самостоятельном изучении материала. Методическое указание будет полезным студентам механических специальностей очной формы обучения.

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия тел (состояния их покоя или поступательного равномерного прямолинейного движения) под действием сил.

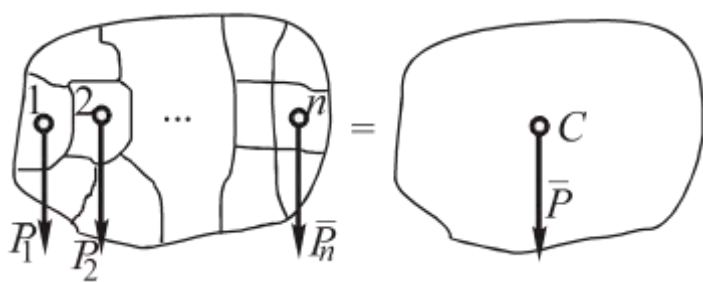
1.1.1. Классификация сил

Сила – вектор, однозначно определяющий механическое действие одного тела на другое. Как и всякий вектор, вектор силы $\vec{F}$ характеризуется тремя параметрами: линией действия, направлением, величиной (модулем). Единица размерности силы в СИ: Н – Ньютон. Сложение, разложение, умножение, проецирование векторов сил производят по правилам действия с векторами.

В зависимости от характера приложения различают силы *объемные* – приложенные ко всем частицам объема тела (к ним относят гравитационные, электростатические, электромагнитные и др. силы) и *поверхностные* – приложенные только к элементам поверхности тела (силы давления и трения). Реальные объемные и поверхностные силы являются *распределенными*. В механике при решении задач эти силы, как правило, заменяют *сосредоточенными*, т. е. приложенными в точке.

Примеры замены основных распределенных сил сосредоточенными.

1. *Гравитационная (сила тяжести)* – сосредоточенную силу



$\vec{P}$ прикладывают в центре тяжести тела C (у однородного симметричного тела он находится в центре или на оси геометрической симметрии) (рис. 1.1).

Рис. 1.1

2. *Поверхностная* (давление газа, воды, ветра, снега и др.).
Равномерно распределенная нагрузка (рис. 1.2).

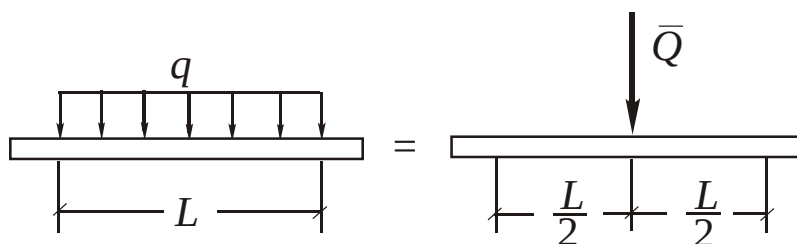


Рис 1.2

$$Q = q L,$$

где q – интенсивность нагрузки, Н/м; L – интервал, м.

Нагрузка, распределенная по закону треугольника (рис. 1.3).

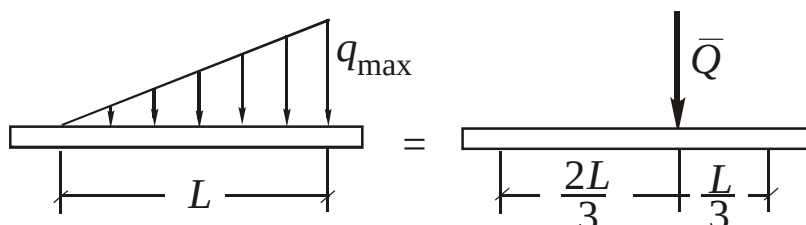


Рис. 1.3

$$Q = 0,5 q_{\max} L.$$

При более сложном характере распределения нагрузки величина Q пропорциональна площади заштрихованной фигуры.

Кроме того, различают *активные* силы (их линии действия, направления, величины заданы) и *реакции связей* (их линии действия и направления зависят от вида связи, см. п. 1.1.3).

Системой сил называют любую совокупность сил, приложенных к точке, телу или системе тел.

Эквивалентные системы сил – под действием которых тело движется одинаково или находится в равновесии.

Равнодействующая $\bar{R}$ – одна сила, эквивалентная системе n сил: $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum \bar{F}_k$.

Равнодействующая двух сил $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ находится по правилу параллелограмма.

Уравновешенная система сил – под действием которой тело

находится в равновесии (эквивалентная нулю): $\sum \bar{F}_k = 0$.

1.1.2. Аксиомы статики

Аксиомами называют положения, принимаемые на основе опыта без доказательств.

1. *Аксиома равновесия системы двух сил*: система двух сил уравновешена только в том случае, когда силы равны по модулю и направлены противоположно по одной линии (рис. 1.4):



$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0.$$

Рис. 1.4

Следствие: изменение точки приложения силы на линии вектора не изменяет ее действия на тело, поскольку во всех положениях она будет уравновешена одной и той же силой, приложенной по общей линии действия.

2. *Аксиома сохранения движения тела*: движение или равновесие тела не изменится, если к нему дополнительно приложить или отнять уравновешенную систему сил.

3. *Аксиома действия и противодействия*: действие одного тела на другое сопровождается равным по величине и обратным по направлению противодействием: $F_{12} = F_{21}$ (рис. 1.5).

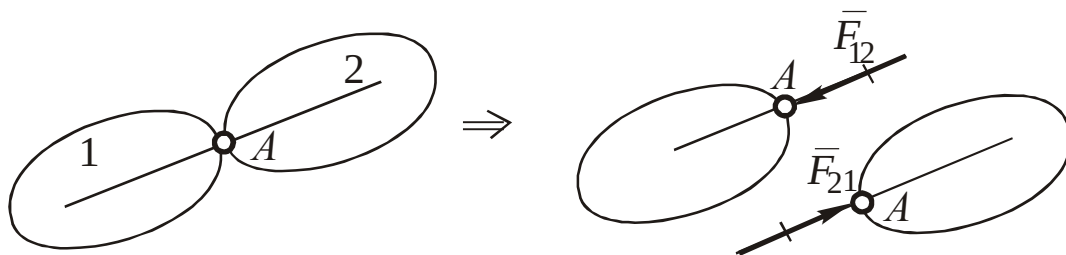


Рис. 1.5

Примечание: система сил действия и противодействия не уравновешена, т. к. $\bar{F}_{12}$ приложена к телу 1, а $\bar{F}_{21}$ – к телу 2.

4. *Аксиома (принцип) «отвердевания»*: равновесие системы

тел не нарушится, если эти тела будут жестко соединены между собой (рис. 1.6).

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

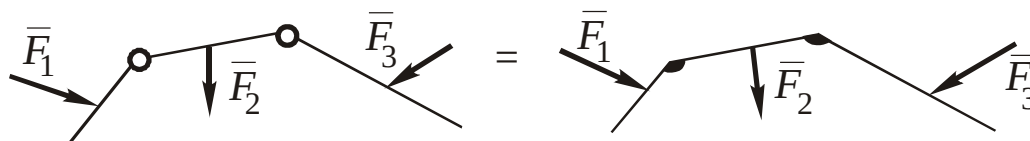


Рис. 1.6

5. *Аксиома связей*: тело, находящееся под действием связей, может быть освобождено от их действия, если к нему дополнительно приложить реакции этих связей.

Под *связью* в статике понимают любое устройство, препятствующее перемещению тела под действием активных сил. *Реакция связи* – сила, с которой связь действует на тело.

1.1.3. Основные виды связей и их реакции

Практически любое реальное тело находится под действием связей. Ниже приведены 4 основные группы связей. Общее правило определения направления реакции связи состоит в следующем: она направлена в сторону, противоположную той, куда связь препятствует перемещаться телу в точке ее приложения.

Примечание: на рис. 1.7–1.14 с целью сокращения объема графической информации указаны одновременно и связи, и их реакции, что, строго говоря, противоречит аксиоме связей (п. 1.1.2).

1. *Гладкая поверхность*. Реакция $\bar{N}$ приложена в точке (на интервале) контакта, направлена по общей нормали к поверхностям в сторону от отбрасываемой связи (рис. 1.7).

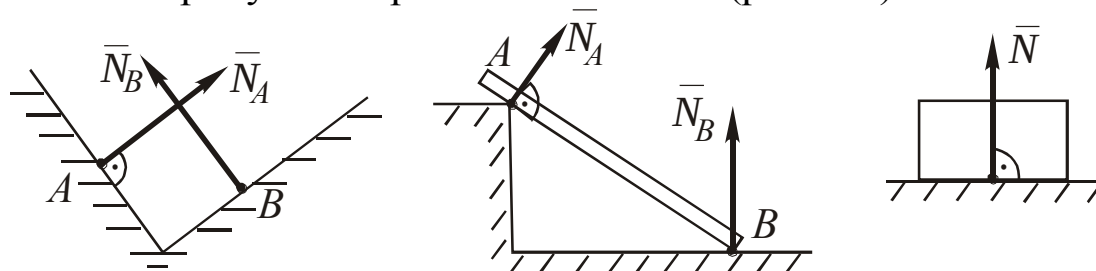


Рис. 1.7

Подвижный шарнир. Реакция $\bar{N}_A$ приложена к оси шарнира и направлена по нормали к опорной шероховатой поверхности от нее (рис. 1.8).

2. *Растянутая нить.* Реакция $\bar{T}$ приложена в точке присоединения нити и направлена вдоль нее (по касательной), в сторону, куда нить тянет тело (рис. 1.9).

Стержень (от нити на чертеже отличается наличием шарниров на концах). Реакция $\bar{S}$ приложена к точке присоединения и направлена вдоль стержня. Принято считать, что $S > 0$, если стержень растянут, и $S < 0$ – если он сжат (рис. 1.10).

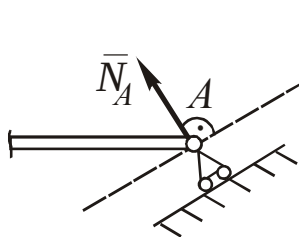


Рис. 1.8

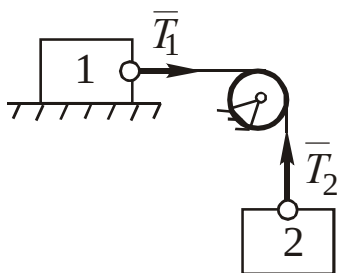


Рис. 1.9

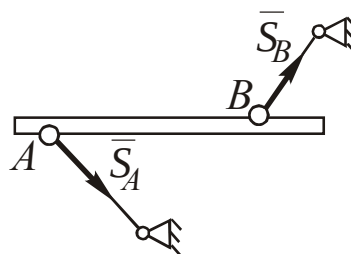


Рис. 1.10

3. *Неподвижные шарниры.*

Осевой (в плоском механизме ось шарнира перпендикулярна чертежу). Реакция $\bar{R}$ приложена к оси и направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач $\bar{R}$ разлагают на составляющие в этой плоскости (рис. 1.11).

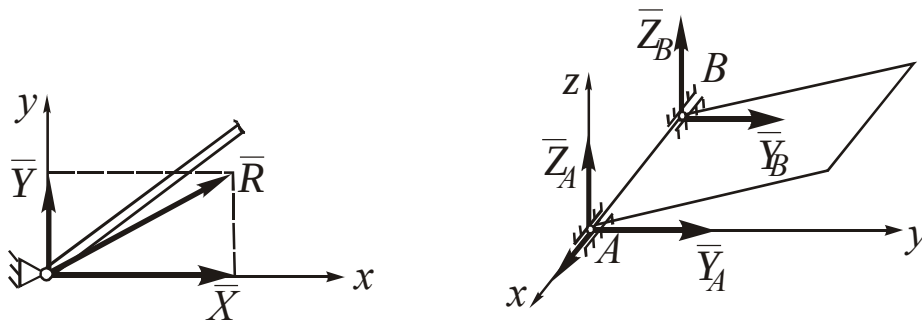


Рис. 1.11

Сферический (подпятник). Реакция R приложена к центру сферы (пересечению оси стержня подпятника с опорной поверх-

ностью) и разлагается на составляющие X , Y , Z (рис. 1.12).

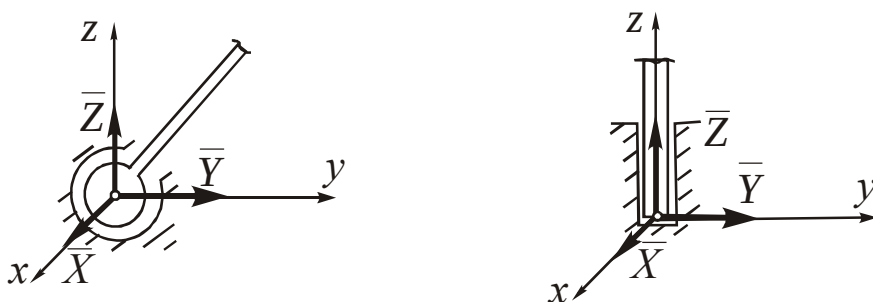


Рис. 1.12

4. Заделки.

Жесткая (рис. 1.13). Реакция приводится к точке A пересечения оси стержня со стенкой и представляет собой комбинацию реакции неподвижного осевого шарнира ($\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$) и пары сил с неизвестным реактивным моментом m_A (см. п. 2.3).

Скользкая (рис. 1.14). Реакция приводится к середине A ползуна и представляет собой комбинацию реакции гладкой поверхности $\bar{N}_A$ и пары сил с неизвестным реактивным моментом m_A (см. п. 1.2.3).

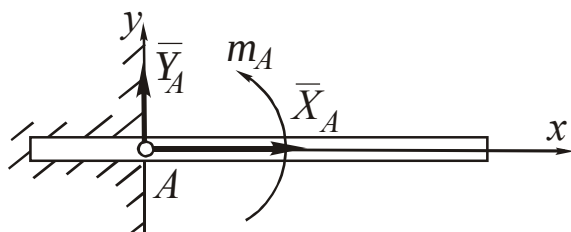


Рис.1.13

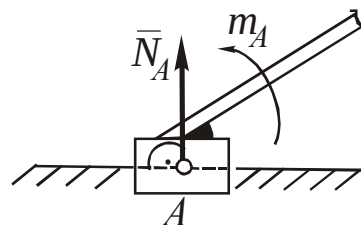


Рис. 1.14

1.1.4. Трение

Поверхности с трением являются особыми видами связей. Принципиально различают два вида трения: скольжения и качения.

Трение скольжения возникает при относительном перемещении шероховатых поверхностей. Физическими причинами его являются зацепление шероховатостей и прилипание поверхностей (адгезия). Теория трения скольжения до настоящего времени

не разработана. Расчеты основаны на использовании экспериментально полученных Ш. Кулоном законов, сущность которых сводится к следующему.

1. Сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ направлена по касательной к соприкасающимся поверхностям в сторону, противоположную относительному смещению (при равновесии – возможному смещению) тела (рис. 1.15).

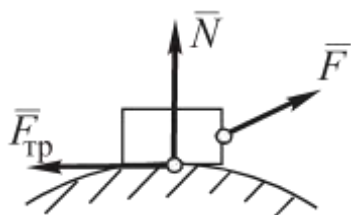


Рис. 1.15

2. С увеличением сдвигающей силы $\bar{F}$ величина $\bar{F}_{\text{тр}}$ увеличивается в диапазоне $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пр}}$, где $F_{\text{пр}}$ – предельное значение силы трения, после превышения которого начинается перемещение тела, $F_{\text{пр}} = f_0 N$; f_0 – статический коэффициент трения, завися-

щий от материала, вида обработки поверхностей, температуры, влажности и определяемый экспериментально. Значения f_0 составляют: для пары «кирпич–бетон» – 0,7–0,8; «дерево–дерево» – 0,4–0,7; «металл–металл» – 0,1–0,3; «металл–лед» – 0,02–0,04. В задачах статики обычно рассматривают предельное равновесие тела, т. е. $F_{\text{тр}} = F_{\text{пр}}$. С увеличением относительной скорости величина коэффициента трения $f = F_{\text{тр}}/N$ сначала резко падает, а затем стабилизируется, при этом $f < f_0$.

Трение качения возникает при качении колеса. Физической причиной его является деформирование тел, вследствие чего механическое взаимодействие катящегося тела и опорной поверхности происходит не в точке, а на интервале AB (рис. 1.16).

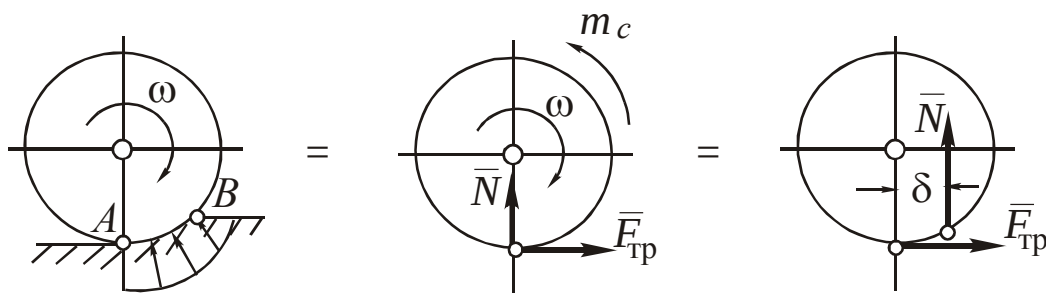


Рис. 1.16

При приведении к точке A реакция представляет собой комбинацию реакции поверхности с трением скольжения ($\bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}$) и пары сил (см. п. 1.2.3), направленной в сторону, обратную направлению поворота ω , момент которой m_c (момент сил сопротивления качению) вычисляют по формуле $m_c = \delta N$, где δ – коэффициент трения качения, измеряющийся в метрах и определяемый экспериментально. Значения δ составляют: для пары «дерево–дерево» 0,5–1 мм; «сталь–сталь» – 0,01–0,05 мм.

1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ НА ТЕЛО

Действие одиночной силы $\bar{F}$ на тело очевидно: она будет вызывать перемещение точки приложения силы (сдвигание ее) в направлении вектора $\bar{F}$. При приложении систем сил их действие сводится к сдвигу и повороту тела.

1.2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил

Сходящимися называют силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующую сил $\bar{F}_k$ при $k = 1...n$ определяют в соответствии с уравнением $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ графически или аналитически.

Графический способ основан на правиле сложения векторов (равнодействующая двух сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах). Последовательным применением этого правила можно сложить любое количество сил, однако на практике его в чистом виде не применяют ввиду трудоемкости. Гораздо более удобно построение *силового многоугольника*, стороны которого представляют собой отложенные из начальной точки O_F в масштабе, последующая из конца предыдущей, слагаемые силы (рис. 1.17). Поскольку данная фигура совмещает в себе все стороны упомянутых выше параллелограммов, равнодействующая $\bar{R}$ будет *замыкающей стороной* силового многоугольника.

Графические построения дают высокую погрешность, а для

объемных задач они практически невозможны.

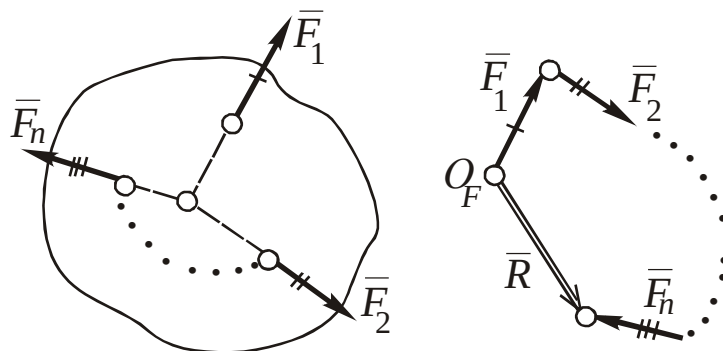


Рис. 1.17

Аналитический способ основан на сложении проекций сил $\bar{F}_k$ на координатные оси x, y, z : F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} . Величину вектора $\bar{R}$ определяют через проекции R_x, R_y, R_z : $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$, а его направление – через «направляющие косинусы»:

$$\cos(\bar{R}, x) = R_x/R; \cos(\bar{R}, y) = R_y/R; \cos(\bar{R}, z) = R_z/R,$$

где $R_x = \sum F_{kx}; R_y = \sum F_{ky}; R_z = \sum F_{kz}$.

Проекция вектора $\bar{F}$ на ось x – скалярная величина

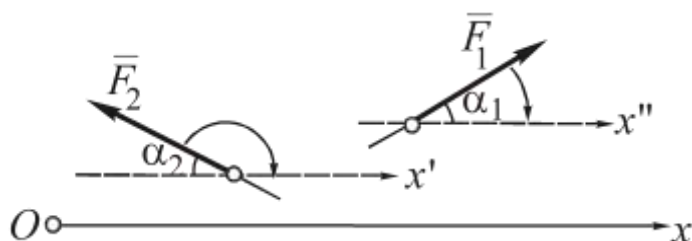


Рис. 1.18

$F_x = \pm F \cos \alpha$, где α – острый угол между линиями действия $\bar{F}$ и оси x без учета их направления; знак «+» выбирается в том случае, если с учетом

направлений $\bar{F}$ и x фактический угол между ними острый, и «-» – если он тупой (рис. 1.18).

$$F_{1x} = +F_1 \cos \alpha_1, F_{2x} = -F_2 \cos \alpha_2.$$

Поскольку система сходящихся сил всегда имеет равнодействующую $\bar{R}$, то $\bar{R}$ является *количественной мерой сдвигающего эффекта* данной системы сил.

1.2.2. Алгебраический момент силы относительно центра

При наличии закрепленной точки O в плоскости действие силы $\vec{F}$ даст *вращающий эффект*, количественной мерой которого является *момент силы $\vec{F}$ относительно центра O* , определяемый по формуле

$$m_O(\vec{F}) = \pm \bar{F} h_O,$$

где h_O – *плечо* силы $\vec{F}$ относительно точки O , равное величине перпендикуляра, опущенного из O на линию действия $\vec{F}$. Знак

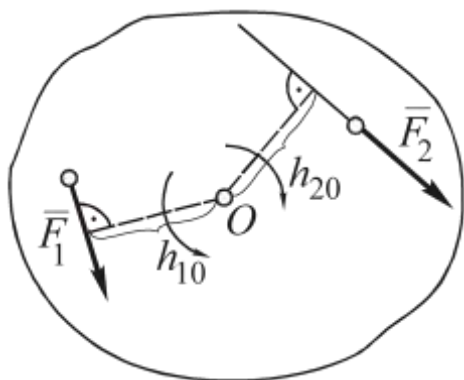


Рис. 1.19

«+» выбирают, если поворот плеча вокруг O в направлении $\vec{F}$ виден *против часовой стрелки*, и «-» – если *по часовой*. На рис. 1.19 $m_O(\vec{F}_1) = +F_1 h_{10}$; $m_O(\vec{F}_2) = -F_2 h_{20}$.

Свойства $m_O(F)$.

1. $|m_O(\vec{F})| = F h_O = 0$, если

$h_O = 0$, т. е. момент силы равен нулю, если линия действия силы $\vec{F}$ проходит через точку O (рис. 1.20).

2. *Геометрическая интерпретация.* $|m_O(\vec{F})| = F h_O = AB h_O = 2 S_{\triangle OAB}$, т. е. момент силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника, образованного силой и этим центром (рис. 1.21).

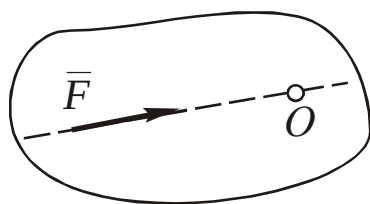


Рис. 1.20

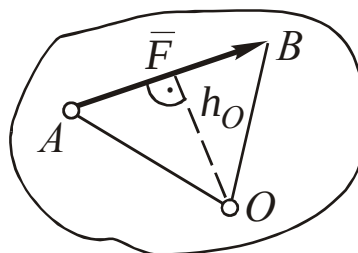


Рис. 1.21

3. *Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона):* относительно любого центра момент равнодействующей $\vec{R}$ равен сумме моментов слагаемых (составляющих) $\vec{F}_k$ этой силы.

Пусть система сил $\bar{F}_k$ ($k = 1...n$), приложенных к точке A , имеет равнодействующую $\bar{R}$ (рис. 1.22). Мысленно приложим к

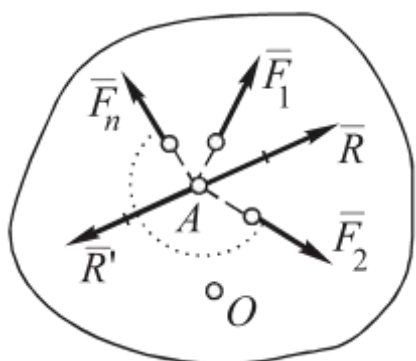


Рис. 1.22

телу дополнительно силу $\bar{R}' = -\bar{R}$. Получим две уравновешенные системы сил: $\bar{R} + \bar{R}' = 0$ и $\sum \bar{F}_k + \bar{R}' = 0$, которые не имеют сдвигающего эффекта. Но тогда обе системы сил не имеют и вращающего эффекта, т. е. $m_O(\bar{R}) + m_O(\bar{R}') = 0$ и $\sum m_O(\bar{F}_k) + m_O(\bar{R}') = 0$, откуда, приравнявая первые слагаемые левых частей уравнений, получим $m_O(\bar{R}) = \sum m_O(\bar{F}_k)$, что и требовалось доказать.

1.2.3. Пара сил

Парой сил называют особую систему из двух параллельных сил, равных по величине и направленных противоположно. Условное обозначение пары $\Pi(\bar{F}; \bar{F}')$.

Свойства пары сил.

1. Оценим сдвигающий эффект пары, т. е. найдем ее равнодействующую (рис. 1.23):

$$R_x = F \cos \alpha - F' \cos \alpha = 0; \quad R_y = F \sin \alpha - F' \sin \alpha = 0;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0.$$

Таким образом, пара сил *не дает сдвигающего эффекта*.

2. Оценим суммарный вращающий эффект пары (рис. 1.24):

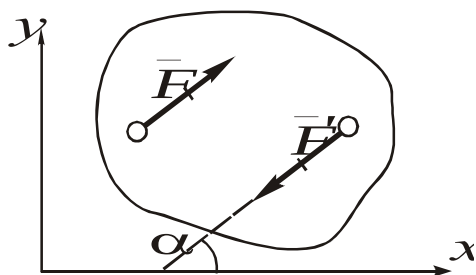


Рис. 1.23

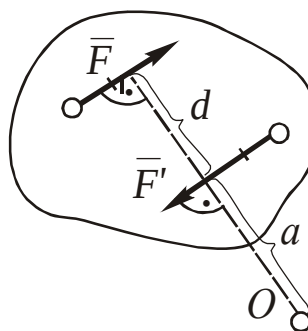


Рис. 1.24

$$m_O(\bar{F}) + m_O(\bar{F}') = -F(a + d) + \bar{F}' a = -F d = m(\bar{F}, \bar{F}').$$

Величину $m(\bar{F}, \bar{F}')$ называют *моментом пары*, т. к. она не зави-

сит от выбора центра O , а величину d – *плечом пары*. Величина и знак момента пары определяют *величину и направление вращающего эффекта* пары.

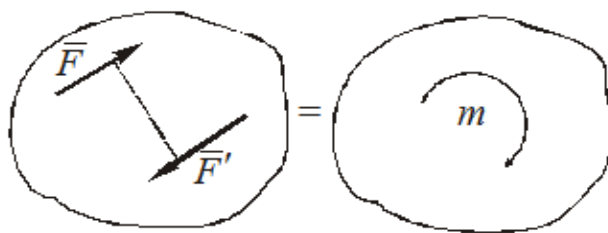


Рис.1.25

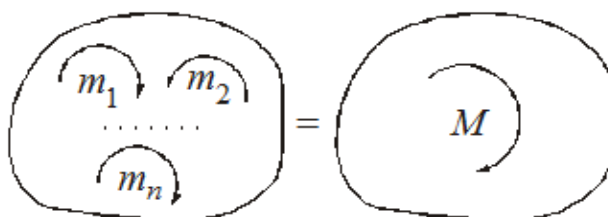


Рис. 1.26

Данное свойство позволяет сделать три практически важных вывода:

а) пары, имеющие разные значения F и d , но равные моменты m , *эквивалентны*;

б) при решении задач удобнее показывать не са-

ми силы пары $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, а направление поворота плеча пары и ее момент m (рис. 1.25);

в) система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар (рис. 1.26): $M = \sum m_k$.

1.2.4. Момент силы относительно центра и пара сил как векторы

При решении пространственных задач удобно задавать вращающий эффект силы или пары вектором $\bar{m}$, который дополнительно определяет плоскость их действия.

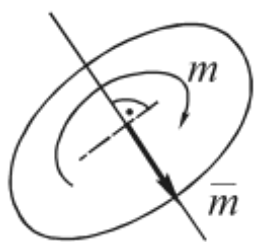


Рис. 1.27

Вектор пары сил $\bar{m} = \bar{m}(\bar{F}; \bar{F}')$ имеет следующие параметры (рис. 1.27):

а) перпендикулярен плоскости действия пары;

б) направлен по правилу «правого винта» по отношению к направлению поворота пары в плоскости;

в) по модулю равен моменту пары m .

Вектор момента силы относительно центра $\bar{m}_O(\bar{F})$ выразим через радиус-вектор $\bar{r}$ точки приложения силы $\bar{F}$, отложенный из O (рис. 1.28):

а) он перпендикулярен плоскости, образованной векторами $(\bar{r}; \bar{F})$;

б) направлен по правилу «правого винта» по отношению к направлению кратчайшего совмещения $\bar{r}$ с $\bar{F}$ (если $\bar{r}$ отложить из точки A);

в) $|m_O(\bar{F})| = F h_O = F r \sin (180 - \alpha) = F r \sin \alpha$.

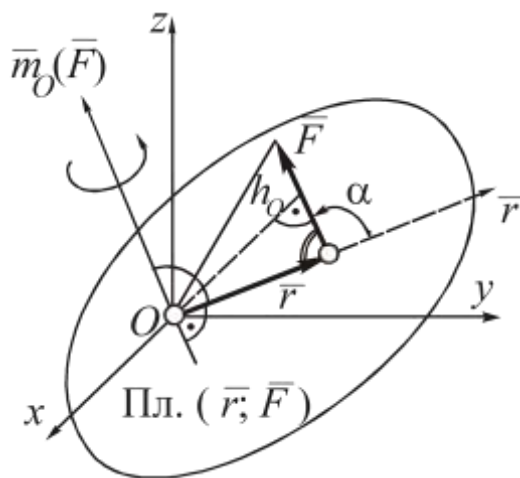


Рис. 1.28

Из приведенного анализа следует, что параметры вектора $\bar{m}_O(\bar{F})$ совпадают с векторным произведением $\bar{r}$ и $\bar{F}$:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Особенности использования векторов $\bar{m}$ и $\bar{m}_O(\bar{F})$ состоят в следующем:

1) вектор $\bar{m}$ (рис. 1.27) – свободный, т. к. он не зависит от выбора центра;

2) сложение векторов $\bar{m}$ и $\bar{m}_O(\bar{F})$ производят аналогично сложению векторов сил, т. е. графически или аналитически (см. п. 1.2.1).

Пример графического сложения векторов моментов пар приведен на рис. 1.29.

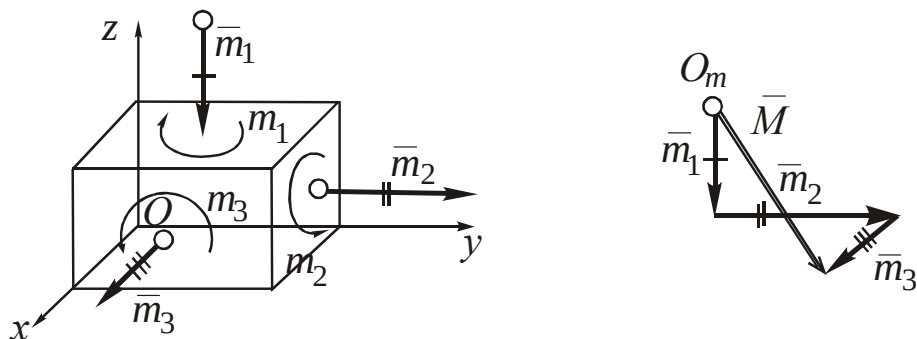


Рис. 1.29

1.2.5. Момент силы относительно оси

Для определения меры вращающего эффекта силы относительно оси можно найти проекцию на эту ось вектора момента силы относительно точки C , взятой на этой оси.

Например, для момента относительно оси z (рис. 1.30):

$$m_z(\bar{F}) = \text{Pr}_z \bar{m}_C(\bar{F}) = m_C(\bar{F}) \cos \alpha.$$

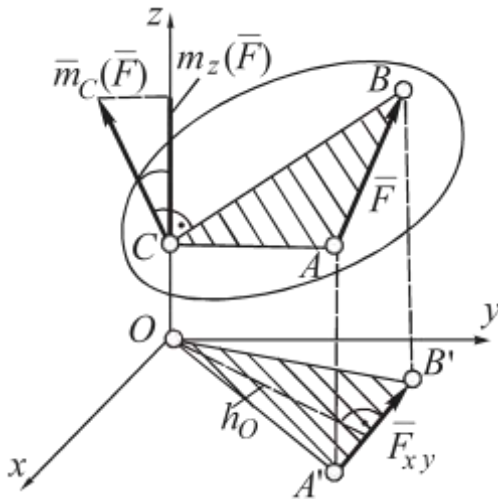


Рис. 1.30

Используя геометрическую интерпретацию $\bar{m}_C(\bar{F})$, получим $m_z(\bar{F}) = 2 S_{\triangle CAB} \cos \alpha = 2 S_{\triangle OA'B'}$, т. е. независимо от положения точки C величина $m_z(\bar{F})$ будет неизменно равна $2 S_{\triangle OA'B'}$.

Определение $m_z(\bar{F})$ указанным выше путем весьма трудоемко и при решении задач не используется. Другой путь состоит в приведении данного момента к моменту относительно центра: $m_z(\bar{F}) =$

$= 2 S_{\triangle OAB} = m_O(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_O$, аналогично: $m_x(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{yz})$; $m_y(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xz})$.

Таким образом, *момент силы относительно оси* равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. Для краткости назовем $\bar{F}_{xy}$, $\bar{F}_{yz}$, $\bar{F}_{xz}$ «вращающими» проекциями силы $\bar{F}$ на координатные или параллельные им плоскости.

Свойства $m_z(\bar{F})$.

1. $m_z(\bar{F}) = F_{xy} h_O = 0$ в двух случаях: а) $F_{xy} = 0$ ($\bar{F} \parallel z$); б) $h_O = 0$ ($\bar{F} \cap z$), т. е. момент равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее.

2. Связь моментов относительно координатных осей и их начала O :

$$m_x(\bar{F}) = \text{Pr}_x \bar{m}_O(\bar{F});$$

$$m_y(\bar{F}) = \text{Pr}_y \bar{m}_O(\bar{F});$$

$$m_z(\bar{F}) = \text{Pr}_z \bar{m}_O(\bar{F}),$$

$$\text{откуда } |\bar{m}_O(\bar{F})| = \sqrt{m_x^2(\bar{F}) + m_y^2(\bar{F}) + m_z^2(\bar{F})}.$$

3. Связь моментов силы относительно координатных осей с проекциями на эти оси:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x) = \\ = \bar{i}m_x(\bar{F}) + \bar{j}m_y(\bar{F}) + \bar{k}m_z(\bar{F}),$$

$$\text{откуда } m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

4. Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона): если $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$, то $m_{z(x,y)}(\bar{R}) = \sum m_{z(x,y)}(\bar{F}_k)$ (определение теоремы и ее доказательство аналогичны п. 1.2.2).

Рекомендуемый порядок определения момента силы относительно оси:

- 1) проверить, не равен ли момент нулю (свойство 1);
- 2) если момент не равен нулю, найти «вращающую» проекцию $\bar{F}$ на координатную плоскость или другую плоскость, перпендикулярную оси, указать расположение этой проекции и найти ее величину;
- 3) найти плечо, опустив перпендикуляр из точки O пересечения оси с плоскостью, перпендикулярной оси, на «вращающую» проекцию, определить знак момента по направлению поворота плеча в направлении «вращающей» проекции аналогично п. 2.2 (при наблюдении из конца оси).

1.2.6. Координаты центра тяжести тела

Центром тяжести тела называют точку C , через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести отдельных частей тела.

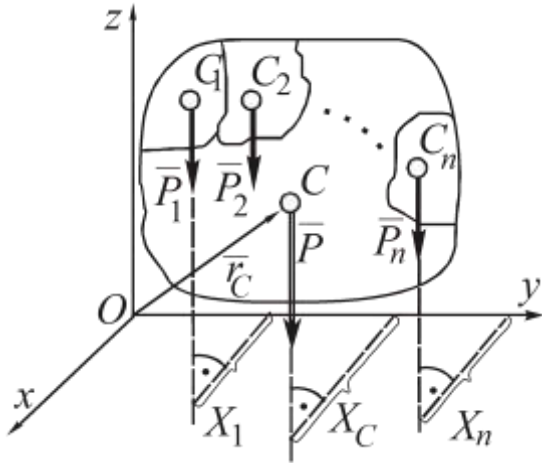
Для тел, размеры которых малы по отношению к радиусу Земли, формулы для расчета координат точки C получают, ис-

пользуя теорему Вариньона. Для моментов относительно оси y (рис. 1.30):

т. к. $\bar{P} = \sum \bar{P}_k$, то $m_y(\bar{P}) = \sum m_y(\bar{P}_k)$, т. е.:

$$P_{x_C} = P_1 x_1 + \dots + P_n x_n = \sum P_k x_k, \text{ откуда } x_C = \frac{1}{P} \sum P_k x_k.$$

Аналогично получают остальные координаты:



$$y_C = \frac{1}{P} \sum P_k y_k; z_C = \frac{1}{P} \sum P_k z_k.$$

где P_k — вес k -й части тела; x_k, y_k, z_k — координаты центра тяжести k -й части тела.

Радиус-вектор C определится по формуле

$$\bar{r}_C = \bar{i}x_C + \bar{j}y_C + \bar{k}z_C = \frac{1}{P} \sum P_k \bar{r}_k$$

Рис. 1.31

Для тел, изготовленных из одного материала (*однородных*), формулы для координат и радиуса-вектора C примут следующий вид (приведены формулы только для x_C , остальные записывают аналогично):

а) для объемных тел $x_C = \frac{1}{V} \sum V_k x_k$;

б) для плоских тел $x_C = \frac{1}{S} \sum S_k x_k$;

в) для проволочных фигур (тонких линий) $x_C = \frac{1}{L} \sum L_k x_k$,

где V, S, L — соответственно, объем, площадь и длина всего тела; V_k, S_k, L_k — объем, площадь и длина k -го участка тела.

У однородных тел, имеющих плоскость, ось или центр геометрической симметрии, точка C лежит на этой плоскости, оси или в этом центре.

Если тело нельзя разбить на конечное число n элементов, то его разбивают на элементарные участки, а суммирование в формулах заменяют интегрированием.

Примеры вывода формул для координат центров тяжести методом интегрирования приведены ниже.

Дуга окружности (линия) (рис. 1.32):

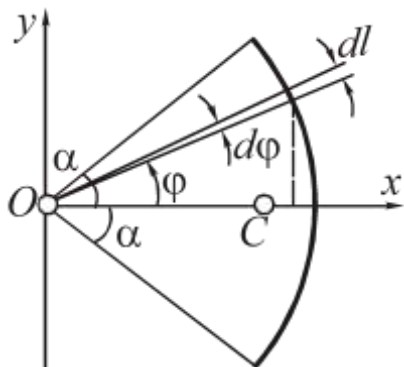


Рис. 1.32

$y_C = 0$ (т. к. x – ось симметрии);

$$x_C = \frac{1}{L} \int x \, dl,$$

где $L = 2R \alpha$ – длина дуги; x – координата элементарного участка длиной dl ; R – радиус дуги; 2α – центральный угол дуги, рад.

Используя угловую координату φ , получим:

$$x = R \cos \varphi; \, dl = R d\varphi;$$

$$X_C = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Круговой сектор (рис. 1.33):

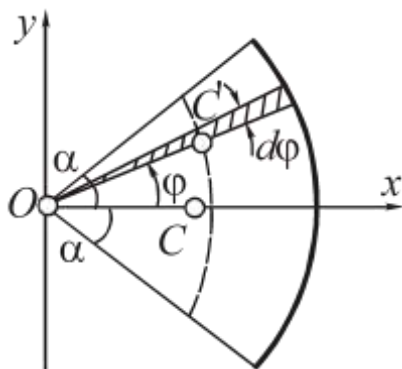


Рис. 1.33

$y_C = 0$;

$dS = 2\pi R^2 \alpha$ – площадь сектора;
 $dS = \pi R^2 d\varphi$ – площадь элементарного участка;
 $x = OC \cos \varphi$ – координата центра тяжести элементарного участка ($OC = 2/3 R$, т. к. C – точка пересечения медиан элементарного треугольника).

$$x_C = \frac{1}{2\pi R^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2\pi}{3} R \cos \varphi R^2 d\varphi = \frac{2}{3} \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

1.3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

1.3.1. Равновесие системы сходящихся сил

Система сходящихся сил обладает только сдвигающим эффектом (п. 1.2.1), поэтому равновесие тела возможно только в случае, если количественная мера этого эффекта (равнодействующая) равна нулю, $\bar{R} = 0$.

При решении задач используют следующие условия равновесия:

а) *аналитическое* (через проекции равнодействующей $\bar{R}$);
 $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$ только в случае, если $R_x = \sum F_{kx} = 0$; $R_y = \sum F_{ky} = 0$; $R_z = \sum F_{kz} = 0$, т. е. для равновесия необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на координатные оси равнялись нулю;

б) *графическое* (построением силового многоугольника);
т. к. $\bar{R}$ – замыкающая сторона силового многоугольника, то при равновесии этот многоугольник должен быть замкнутым (последняя сила $\bar{F}_n$ должна, с учетом точности построений, прийти в начальную точку O_F , рис. 1.17).

1.3.2. Теорема о параллельном переносе силы (Пуансо)

При параллельном переносе силы в новую точку тела для сохранения эквивалентности следует *дополнительно приложить пару*, момент которой равен моменту силы относительно нового центра.

Справедливость теоремы доказывают эквивалентными преобразованиями (рис. 1.33):

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F} + \bar{F}' + \bar{F}'' = & m(\bar{F}''; \bar{F}) &= -F d = \\ &= \bar{F}' + \Pi(\bar{F}''; \bar{F}) & &= m_B(\bar{F}). \\ &(\text{аксиома 2, п. 1.1.2}); & &\end{aligned}$$

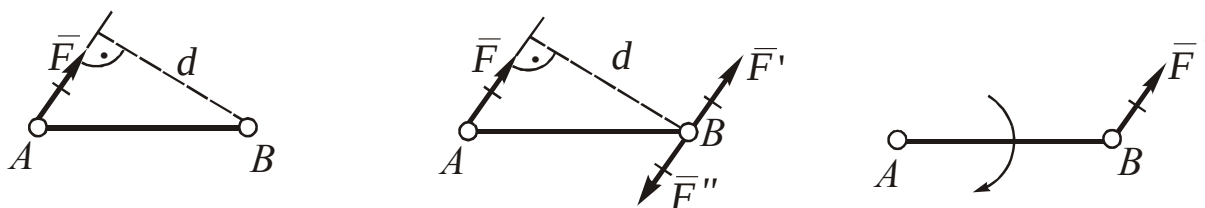


Рис. 1.34

Таким образом, $\bar{F}_{(A)} = \bar{F}_{(B)} + \Pi(\bar{F}''; \bar{F})$, где $m(\bar{F}''; \bar{F}) = m_B(\bar{F})$.

1.3.3. Равновесие произвольной плоской системы сил

Произвольной плоской называют систему сил, расположенных произвольно в плоскости.

Для определения действия плоской системы сил на тело преобразуем ее в комбинацию систем сходящихся сил и пар с помощью теоремы по п. 1.3.2, т.е. перенесем все силы $\bar{F}_k$ ($k=1..n$) в произвольную точку O (эту операцию называют *приведением плоской системы сил к центру O*) (рис. 1.35):

$$\bar{F}_1 = F'_1 + \Pi(m_1), \text{ где } m_1 = m_0(\bar{F}_1);$$

$$\bar{F}_2 = F'_2 + \Pi(m_2), \text{ где } m_2 = m_0(\bar{F}_2);$$

$$\bar{F}_n = F'_n + \Pi(m_n), \text{ где } m_n = m_0(\bar{F}_n).$$

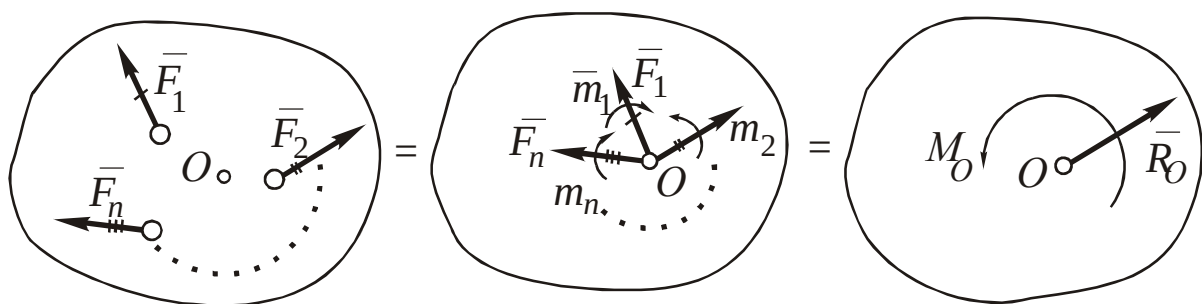


Рис. 1.35

Найдем равнодействующую системы сил $\bar{F}_k$ и сложим пары сил $\Pi(m_k)$ (п. 1.2.3):

$$\bar{R}_O = \sum \bar{F}'_k = \sum \bar{F}_k; M_O = \sum m_k = \sum m_O(\bar{F}_k).$$

$\bar{R}_O$ называют *главным вектором*, а M_O – *главным моментом* плоской системы сил. Следовательно, действие плоской системы сил на тело сводится к сдвигающему эффекту, мерой которого является $\bar{R}_O$, и вращающему эффекту, мерой которого является M_O .

Для вывода условий равновесия приравняем нулю меры сдвигающего и вращающего эффектов:

$$\begin{aligned} R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad R_{Ox} = \sum F_{kx} = \sum F_{kx} = 0; \\ M_O = \sum m_O(\bar{F}_k) = 0, \quad R_{Oy} = \sum F_{ky} = \sum F_{ky} = 0; \\ \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы *суммы их проекций на непараллельные оси и суммы моментов относительно произвольного центра равнялись нулю*.

Примечания

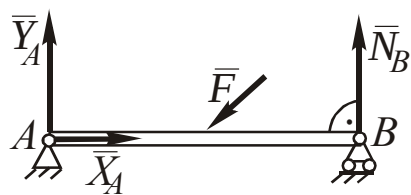
1. При решении задач иногда удобнее применять *дополнительные формы уравнений равновесия* (приводятся без вывода):

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \text{или} \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum F_{kx} = 0; \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0, \end{aligned}$$

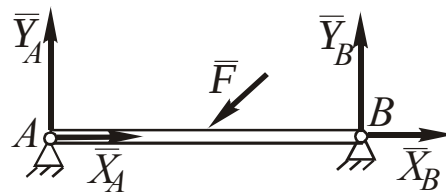
где ось x не перпендикулярна отрезку AB ;

где центры A , B и C не должны находиться на одной прямой.

2. Т. к. все формы условий равновесия тела содержат 3 уравнения, из них можно найти не более *трех неизвестных* ($m \leq 3$), в этом случае задачу на равновесие плоской системы сил считают *статически определимой*, при $m > 3$ – *статически неопределимой* (решение таких задач возможно только с учетом деформирования тел, они рассматриваются в разделе сопротивление материалов) (рис. 1.36).



$m = 3$, статически
определимая задача



$m = 4$, статически
неопределимая задача

Рис. 1.36

3. Существуют *графические условия* равновесия плоской системы сил, связанные с построением *замкнутых* силового (пп. 1.2.1, 1.3.1) и *веревочного многоугольников*, которые в данном пособии не рассматриваются.

4. *Системой тел* называют несколько тел, соединенных между собой *внутренними связями*. При решении задач на равновесие системы тел рассматривают равновесие каждого из тел, отделяя их от системы (рис. 1.37) и составляя для каждого по 3 уравнения равновесия, при этом к реакциям внутренних связей применяют аксиому действия и противодействия (аксиома 3, п. 1.1.2).

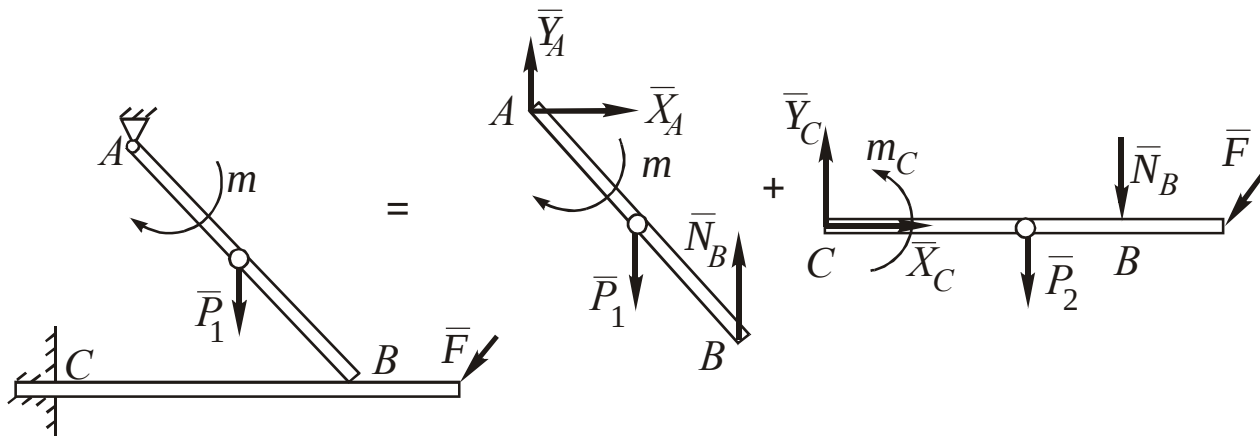


Рис. 1.37

На рис. 1.37 $\bar{N}_B$ – реакция внутренней связи (гладкая поверхность), суммарное количество неизвестных реакций – 6 ($\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{N}_B$, $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, m_C), что равно количеству уравнений равновесия для двух тел, т. е. задача статически определима.

Возможно также рассмотрение равновесия системы тел с

отвердевшими внутренними связями (аксиома 4, п. 1.1.2).

5. В качестве системы тел может рассматриваться *одно тело (балка) при его сечении*, при этом внутренняя связь считается жесткой заделкой (рис. 1.38).

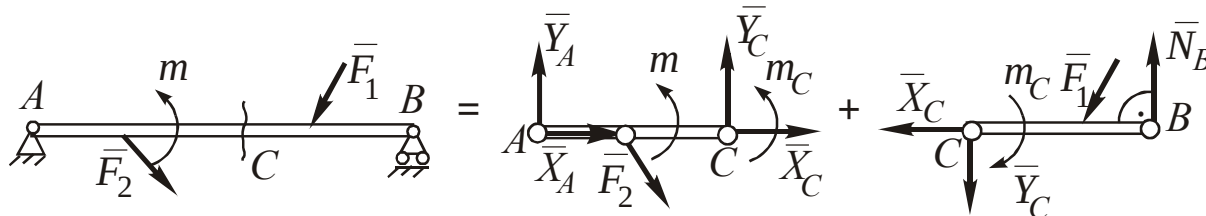


Рис. 1.38

На рис. 1.38 $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, m_C – реактивные усилия и момент пары внутри балки.

1.3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Произвольной пространственной называют систему сил, расположенных произвольно в пространстве (объеме).

Преобразуем произвольную пространственную систему сил в комбинацию систем сходящихся сил и пар с помощью теоремы (п. 3.2), т. е. перенесем параллельно силы $\bar{F}_k$ ($k = 1...n$), каждую в своей плоскости, в произвольную точку O , при этом изображая пары сил векторами (приведем систему сил к центру O).

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_1 + \Pi(\bar{m}_1), \text{ где } \bar{m}_1 = \bar{m}_O(\bar{F}_1);$$

$$\bar{F}_2 = \bar{F}'_2 + \Pi(\bar{m}_2), \text{ где } \bar{m}_2 = \bar{m}_O(\bar{F}_2);$$

.....

$$\bar{F}_n = \bar{F}'_n + \Pi(\bar{m}_n), \text{ где } \bar{m}_n = \bar{m}_O(\bar{F}_n).$$

Найдем главный вектор $\bar{R}_O$ (п.2.1) и главный момент $\bar{M}_O$ (п. 2.4) пространственной системы сил (рис. 3.6):

$$\bar{R}_O = \sum \bar{F}_k; \quad \bar{M}_O = \sum \bar{m}_k = \bar{m}_O(\bar{F}_k).$$

Для вывода условий равновесия приравняем нулю меры сдвигающего $\bar{R}_O$ и вращающего $\bar{M}_O$ эффектов:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = 0, \text{ откуда: } R_{Ox} = \sum F'_{kx} = \sum F_{kx} = 0;$$

$$R_{Oy} = \sum F'_{ky} = \sum F_{ky} = 0;$$

$$R_{Oz} = \sum F'_{kz} = \sum F_{kz} = 0;$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0, \text{ откуда: } M_x = \sum m_x(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_y = \sum m_y(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_z = \sum m_z(\bar{F}_k) = 0.$$

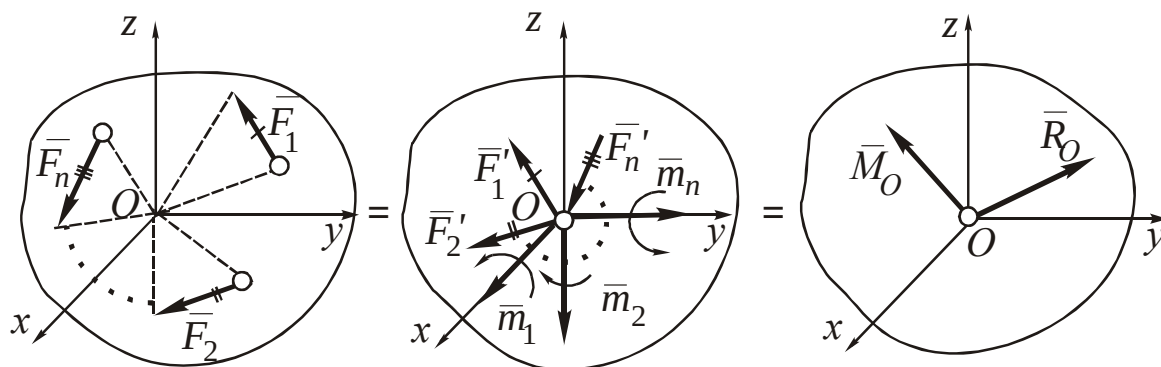


Рис. 1.39

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы их проекций на координатные оси и моментов относительно этих осей равнялись нулю.

1.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

1.4.1. Методика решения задач на равновесие систем сил

1. Установить, равновесие какого тела (тел) следует рассмотреть. Каким будет тело, к которому приложены все связи, реакции которых необходимо определить в задаче. Возможны следующие варианты рассматриваемых тел: точка (узел), одиночное тело (например, стержень, шар, цилиндр, пластина и т. д.), система тел. В последнем случае считают внутренние связи отвердевшими (применяют принцип «отвердевания») (п. 1.1.2) или разделяют систему тел на отдельные тела (п. 1.3.3, примечание 4).

2. Составление рабочего чертежа. От выбранного сечения тела отбрасывают все связи, заменяя их действие реакциями

(п. 1.3). Реакции обозначают соответствующими буквами (произвольное обозначение или применение общего символа реакции $\bar{R}$ недопустимо). Часть связей (*гладкая поверхность, подвижный шарнир, нить*) имеет вполне определенное направление реакции. Усилия в *стержне* $\bar{S}$ предполагают положительным (направляют реакцию как у растянутой нити). Составляющие реакций *неподвижных шарниров, жесткой заделки* рекомендуется направлять сонаправленно с координатными осями, а пары с реактивными моментами (у заделок) – против часовой стрелки. Все участки *растянутой нити* при огибании ею блоков имеют одинаковые натяжения, а если к нити подвешен груз, то реакция нити равна весу груза. Линию действия реакции *нити* при наличии отклоняющих блоков определяют по участку, прилегающему к точке ее соединения с телом, независимо от остальных участков. Направление *силы трения скольжения* $\bar{F}_{\text{тр}}$ вдоль линии действия принимают произвольно.

На чертеже изображают активные силы, при этом распределенные силы заменяют сосредоточенными (рис. 1.2, 1.3).

3. *Составление уравнений равновесия.* Вид уравнений равновесия зависит от конкретного вида системы сил: сходящейся (п. 1.3.1), произвольной плоской (п. 1.3.3), произвольной пространственной (п. 1.3.4). Количество уравнений *не должно быть больше* достаточного для равновесия тела: 2 – для плоской системы сходящихся сил, 3 – произвольной плоской и 6 – пространственной («лишние» уравнения являются алгебраическим следствием основных). Суммарное количество уравнений *должно быть не меньше* числа *неизвестных* (иначе задача статически неопределима).

Составление уравнений равновесия следует *вести параллельно*, выясняя ориентацию очередной рассматриваемой силы относительно осей и плоскостей, а затем определяя *все ее проекции и моменты*.

4. *Решение системы уравнений равновесия.* Составленные уравнения для тел объединяют в систему и решают любым методом (наиболее распространен метод подстановок). Использование рациональных приемов позволяет иметь в одном или нескольких уравнениях по одному неизвестному. Это позволяет,

начиная решение с этих уравнений, решить систему методом подстановок. Получение *отрицательных корней* свидетельствует о том, что фактическое направление соответствующих реакций (составляющих) обратное указанным на чертеже.

5. *Проверка решения.* При отсутствии ответов правильность решения может быть проверена графически или аналитически. Точность аналитических расчетов при этом принимают $0,01 R_{\text{ср}}$, а графических – $0,05 R_{\text{ср}}$, где $R_{\text{ср}}$ – средняя величина модулей найденных m реакций ($R_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |R_i|$).

1.4.2. Система сходящихся сил

Решение задач имеет следующие особенности.

Составление рабочего чертежа. Различают *плоскую и объемную* системы сходящихся сил. В первом случае чертеж изображают в плоскости xu , во втором – в пространстве xuz . Систему сил признают сходящейся в случае, когда все силы приложены к одной точке тела, а также когда к различным точкам тела, находящегося в равновесии, в плоскости приложены *три силы* (поскольку при этом равнодействующая двух сил будет направлена по линии действия третьей). Если одной из сходящихся сил является реакция неподвижного шарнира (п. 1.1.3, поз. 3), то ее не следует разлагать на составляющие, т. к. линия действия ее будет проходить через общую точку пересечения сил.

Составление уравнений равновесия. Как известно (п. 1.3.1), уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил имеют вид: $\Sigma F_{kx} = 0$; $\Sigma F_{ky} = 0$. Рекомендуется выбирать *стандартное расположение осей*: Ox – горизонтально вправо, Oy – вертикально вверх. Если одну из осей расположить перпендикулярно к неизвестной реакции, то в соответствующем уравнении проекций будет только одна неизвестная сила, что облегчает вычисление корней уравнения равновесия, однако несколько усложняет определение проекций сил.

Если оси x и y *взаимно перпендикулярны*, проекции сил находят следующим образом:

1) определяют острый угол α между линией действия силы $\vec{F}$ и одной из осей *без учета ее направления*, проекция силы на эту ось будет равна $F\cos\alpha$, а на вторую ось – $F\sin\alpha$;

2) мысленно вектор $\vec{F}$ и оси x, y переносят параллельно в начало вектора $\vec{F}$, если с учетом их направлений *меньший* угол между F и осью *острый*, то проекция на эту ось *положительна*, если он *тупой* – *отрицательна*.

Проверка решения. В задачах данного вида обычно делают графическую проверку – *строят силовой многоугольник*. Выбрав начальную точку O_F и масштаб сил, откладывают из O_F в масштабе известные силы (каждый последующий вектор из конца предыдущего), из O_F и конечной точки построения проводят линии действия неизвестных сил до их пересечения, определяют направления неизвестных сил (ни одна пара стрелок в силовом многоугольнике не должна «сходиться»). Отличие величин неизвестных, найденных двумя способами, не должно превышать 5 %.

Примечание: в некоторых задачах допускается применение только геометрического расчета, т. е. выполняют построение силового многоугольника и его решение относительно неизвестных.

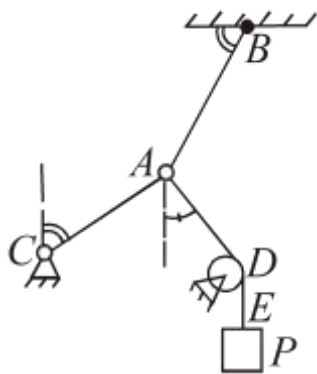


Рис. 1.40

Пример 1. Узел A удерживается в равновесии стержнем AC , нитями AB и ADE , к последней привязан груз весом $\bar{P}$. Найти реакции связей (рис. 1.40).

Примечание: в дальнейшем применены следующие обозначения основных углов: $\sphericalangle$ – 30° ; $\sphericalangle$ – 45° ; $\sphericalangle$ – 60° ; $\sphericalangle$ – 90° , в остальных случаях величина угла указывается в градусах.

Решение. 1. Рассматриваем равновесие узла A , т. к. к этому телу приложены все действующие связи.

2. Реакцию $\vec{T}_B$ нити AB направляем к точке подвеса B , реакцию $\vec{S}_C$ стержня AC – к точке C , реакция нити ADE направлена по участку AD , прилегающему к узлу A , к точке D и равна по ве-

личине весу груза P (таким образом, эта реакция найдена без расчета). Изображаем рабочий чертеж (рис. 1.41).

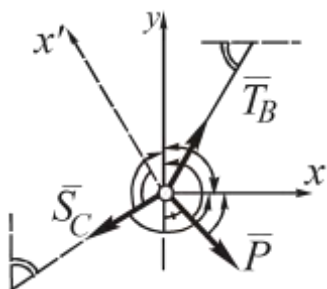


Рис. 1.41

3. Рассмотрим силу $\bar{T}_B$. Линия действия $\bar{T}_B$ составляет с параллелью оси x угол 60° , с учетом направлений вектора и осей оба угла с осями острые (показаны на рис. 2.2 стрелками), получены проекции: $T_{Bx} = T_B \cos 60$; $T_{By} = T_B \sin 60$.

Линия действия силы $\bar{S}_C$ составляет с параллелью оси y угол 60° , углы с осями тупые: $S_{Cy} = -S_C \cos 60$; $S_{Cx} = -S_C \sin 60$.

Линия действия силы $\bar{P}$ составляет с осью y угол 45° , угол с осью x острый, с y – тупой: $P_y = -P \cos 45$, $P_x = P \sin 45$. Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\sum F_{kx} = T_B \cos 60 - S_C \sin 60 + P \sin 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = T_B \sin 60 - S_C \cos 60 - P \cos 45 = 0.$$

Примечание: при выборе оси $x' \perp \bar{S}_C$ в соответствующем уравнении была бы одна неизвестная сила – T_B , что облегчало нахождение корней уравнений.

4. Решая систему уравнений, получим: $T_B = S_C = 1,92P$. Так как $S_C > 0$, стержень AC растянут.

5. Для проверки строим силовой многоугольник (рис. 1.42).

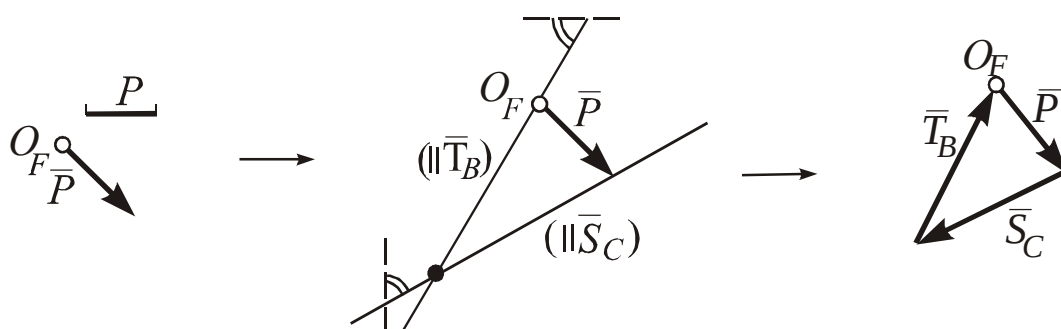


Рис. 1.42

Из графического решения: $S_C = 1,9P$; $T_B = 1,93P$. Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

Пример 2. Шар имеет радиус 1 м и вес 10 Н, $a = 0,2$ м. Найти реакции связей (рис. 1.43).

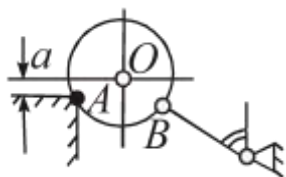


Рис. 1.43

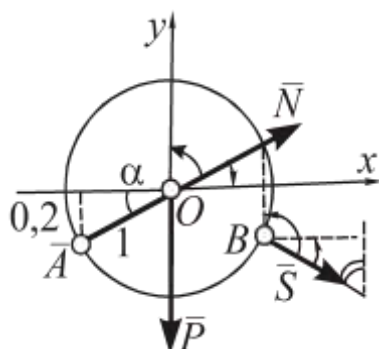


Рис. 1.44

Решение. 1. Рассматриваем равновесие шара. К нему приложены *три* силы, поэтому эти силы – сходящиеся.

2. Реакцию гладкой поверхности $\bar{N}$ приложим в точке A по нормали к шару (она направлена к центру O), реакцию $\bar{S}$ стержня – в точке B , считая его растянутым. Вес шара $\bar{P}$ приложен в точке O , направлен вертикально вниз. Рабочий чертеж показан на рис. 1.44.

3. Сила $\bar{P}$ направлена по оси y противоположно ей: $P_x = 0$; $P_y = -P$.

Линия действия силы $\bar{S}$ составляет угол 60° с параллелью оси y , угол с x острый, с y – тупой: $S_y = -S \cos 60$,
 $S_x = S \sin 60$.

Обозначим α угол между линиями силы N и оси x (этот угол неизвестен, но $\sin \alpha = 0,2/1 = 0,2$; $\cos \alpha = \sqrt{1^2 - \sin^2 \alpha} = 0,98$), углы силы с осями оба острые: $N_x = N \cos \alpha$; $N_y = N \sin \alpha$.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = S \sin 60 + N \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P - S \cos 60 + N \sin 60 = 0.$$

4. Решая систему уравнений, получим $N = 12,9$ Н;

$S = -14,8$ Н (стержень сжат).

5. Строим силовой многоугольник (рис. 1.45).

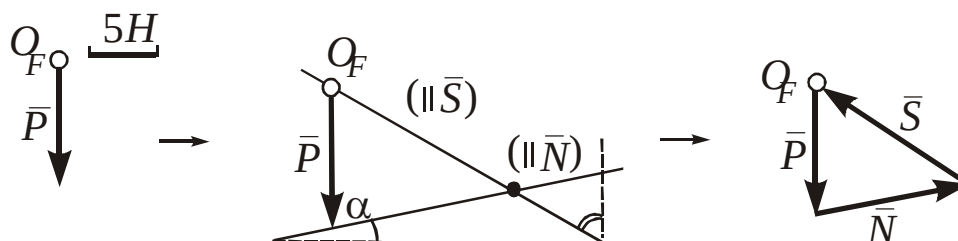


Рис. 1.45

Из графического расчета $S = -15,1$ Н (направление $\bar{S}$ проти-

воположно ранее указанному на рис. 1.44); $N = 12,5$ Н. Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

Пример 3. Определить реакции связей в точках B , C , D и E (рис. 1.46).

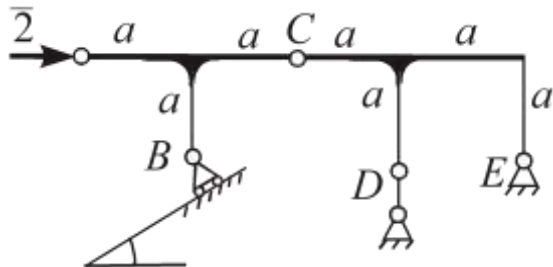


Рис. 1.46

Решение. 1. Связи в точках B , C , D , E приложены к системе тел $BC + CDE$, причем C – внутренняя связь. Рассматриваем равновесие каждой части системы тел (другой вариант: первое тело – система тел с отвердевшим шарниром C ; второе тело – одна из частей системы тел).

2. *Тело BC .* Реакция $\bar{N}$ подвижного шарнира B перпендикулярна к опорной поверхности. Реакцию $\bar{R}_C$ неподвижного шарнира C нет необходимости разлагать на составляющие, т. к. ее линия пройдет через точку пересечения сил $\bar{2}$ и $\bar{N}$, направление $\bar{R}_C$ выбираем произвольно.

Тело CDE . Реакция $\bar{R}'_C$ направляется согласно аксиоме действия и противодействия, $\bar{R}'_C = R_C$. Реакцию $\bar{S}$ стержня в точке D направим аналогично реакции нити. Реакция $\bar{R}_E$ неподвижного шарнира E должна проходить через точку пересечения $\bar{R}'_C$ и $\bar{S}$ (т. к. к телам BC и CDE приложены по *три* силы, обе системы сил – сходящиеся).

Рабочий чертеж показан на рис. 1.47.

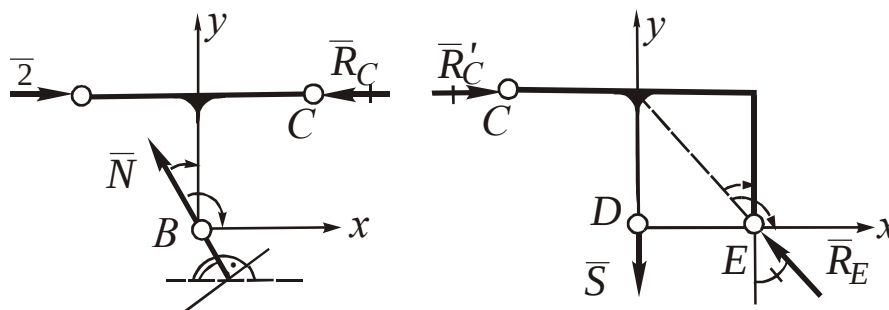


Рис. 1.47

3. *Тело BC .* Сила $\bar{2}$ направлена по оси x : $2_x = 2$; $2_y = 0$. Сила $\bar{R}'_C$ направлена параллельно противоположно x : $R_{Cx} = -R_C$;

$R_{Cy} = 0$. Линия силы $\bar{N}$ образует угол 60° с параллелью x , угол с осью x тупой, с y – острый: $N_x = -N \cos 60$; $N_y = N \sin 60$.

Тело CDE . Сила $\bar{R}_C$ сонаправлена x : $R_{Cx} = R_C$; $R_{Cy} = 0$. Сила $\bar{S}$ направлена по оси y противоположно ей: $S_y = -S$; $S_x = 0$. Линия силы $\bar{R}_E$ составляет угол 45° с параллелью оси y , угол с осью x тупой, с y – острый: $R_{Ey} = R_E \cos 45$; $R_{Ex} = -R_E \sin 45$.

Получена система из 4 уравнений равновесия с 4 неизвестными:

$$BC: \quad \sum F_{kx} = 2 - R_C - N \cos 60 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N \sin 60 = 0;$$

$$CDE: \quad \sum F_{kx} = R_C - R_E \sin 45 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -S + R_E \cos 45 = 0.$$

4. Решение системы уравнений: $N = 0$; $R_C = 2$ Н; $R_E = 2,8$ Н; $S = 2$ Н.

5. Строим два силовых многоугольника (рис. 1.48).

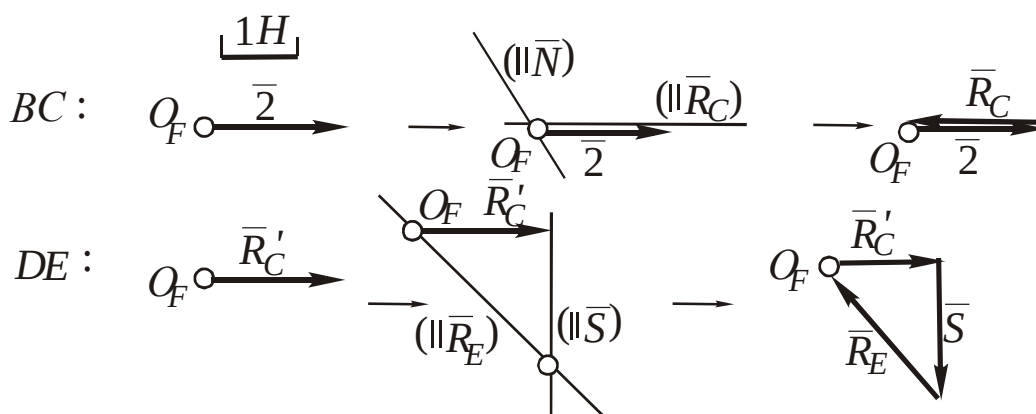
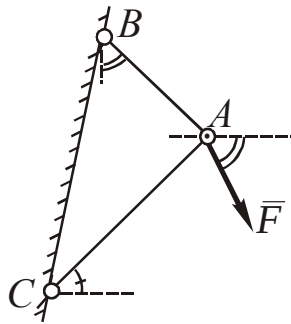


Рис. 1.48

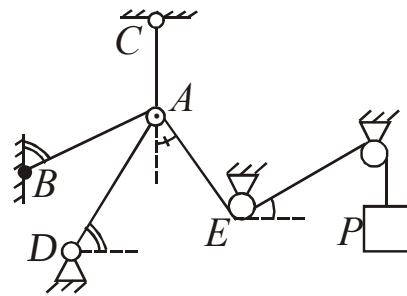
Из графического расчета: $R_C = R'_C = 2$ Н; $N = 0$; $S = 2,02$ Н; $R_E = 2,9$ Н. Расхождение с аналитическим расчетом менее 5 %.

ЗАДАНИЕ. В задачах 4.1–4.10 для самостоятельного решения определить реакции связей через заданные силы.

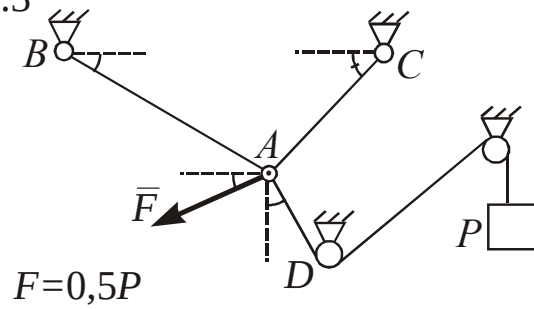
4.1



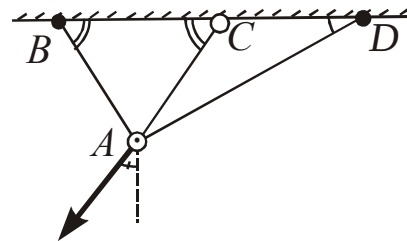
4.2



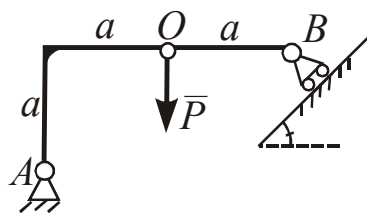
4.3



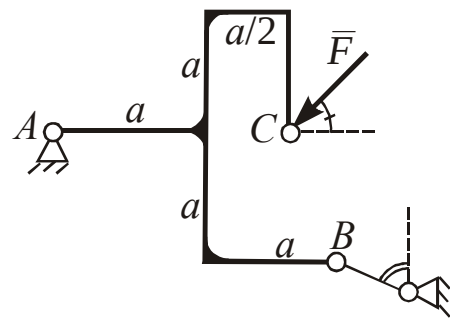
4.4



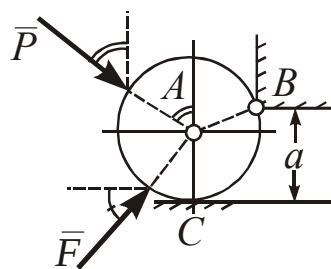
4.5



4.6

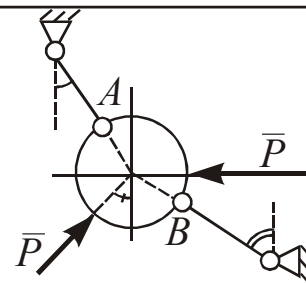


4.7

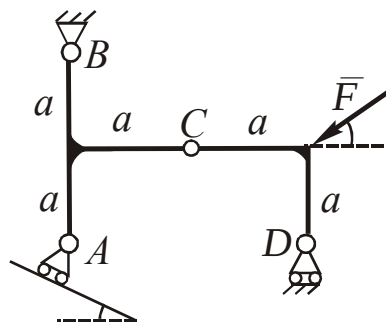


$F = 0,5P$; $AC = 1 \text{ m}$; $a = 1,5 \text{ m}$

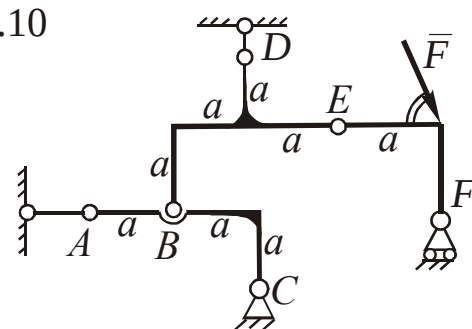
4.8



4.9



4.10



1.4.3. Произвольная плоская система сил

Решение задач имеет следующие особенности.

Составление чертежа. Чертеж всегда располагают в координатной плоскости xu , оси рекомендуются направлять стандартно (x – вправо, y – вверх).

Составление уравнений равновесия.

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в основной форме имеют вид (п. 1.3.3): $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum m_O(F_k) = 0$. Дополнительные формы уравнений равновесия (п. 1.3.3, примечание 1) применяют, в основном, при расчете ферм (см. п. 5).

Графическое решение задач на равновесие плоской системы сил связано с совместным построением замкнутых *силового и веревочного многоугольников* (см., например, [2, с. 37–39]), что весьма трудоемко, и в данном пособии не рассматривается.

Проверку решения осуществляют составлением дополнительного проверочного уравнения равновесия (обычно, это уравнение моментов). Поясним, как рационально составить расчетное и проверочное уравнения моментов. *Расчетное* уравнение должно содержать наименьшее возможное количество неизвестных. Если выбрать центр *на пересечении линий действия двух из трех неизвестных сил*, то по свойству 1 (п. 1.2.2) моменты их относительно этого центра будут равны нулю, и в уравнении будет только *одно* неизвестное. При непараллельных неизвестных силах (реакциях) таких пересечений будет три, выбор конкретного центра зависит от геометрических условий задачи. *Проверочное* уравнение должно содержать *все неизвестные силы (реакции)*, поэтому выбранный центр *не должен лежать на линиях действия ни одной из них*. Вместе с тем, данное уравнение можно несколько сократить, если проверочный центр выбрать *на пересечении максимального количества известных (активных) сил*. В задачах на равновесие системы тел следует избегать дублирования проверок, т. е. найденную реакцию достаточно проверить один раз.

Выбрав оси x , y и центры в расчетном и проверочном уравнениях моментов, приступают к определению проекций и моментов сил, рассматривая их по очереди:

1) уясняют расположение силы, определяют величины и знаки проекций на обе оси (см. п. 1.4.2);

2) определяют моменты сил относительно выбранных центров, опуская *перпендикуляр (плечо) из центра на линию действия силы, а затем поворачивая плечо вокруг центра в направлении вектора силы*; момент равен произведению модуля силы на плечо со знаком «+», если указанный поворот плеча происходит *против часовой стрелки (ч.с.)*, и «−» – если *по часовой* (если центр находится на линии действия силы, момент равен нулю).

В отдельных случаях для определения момента силы целесообразно использовать теорему Вариньона (п. 1.2.2, поз. 3): силу разлагают на составляющие, параллельные осям (их величины равны соответствующим проекциям силы), и находят сумму моментов этих составляющих. Трудоемкость решения при этом снижается в том случае, когда для определения плеча обычным способом требуются громоздкие геометрические расчеты.

Если в уравнении моментов все плечи сил могут быть выражены через общий размер, на эту величину производят сокращение, таким образом можно обойтись без абсолютных размеров плеч.

Проверка решения. Найденные из решения расчетных уравнений неизвестные силы (реакции) подставляют в проверочное уравнение. С учетом погрешности расчетов полученная сумма моментов не должна превышать установленного предела:

$$\sum m_P(F_k) \leq 0,01 R_{\text{ср}}, \text{ где } R_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |R_i| - \text{средняя величина модулей найденных реакций, иначе решение содержит ошибку.}$$

Пример 1. Вес однородного стержня равен $\bar{P}$. Найти реакции связей (рис. 1.49).

Решение. 1. Рассматриваем равновесие стержня AB .

2. Вес стержня $\bar{P}$ приложим к его центру O . Реакции $\bar{S}$ стержня и $\bar{T}$ нити направляем от точки A вдоль связей, реакцию $\bar{N}$ гладкой поверхности – перпендикулярно к ней. Рабочий чертеж показан на рис. 1.50.

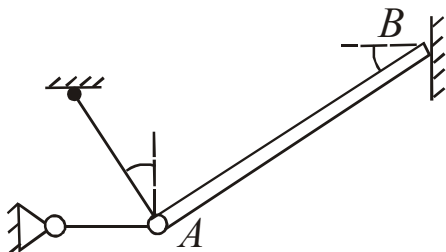


Рис. 1.49

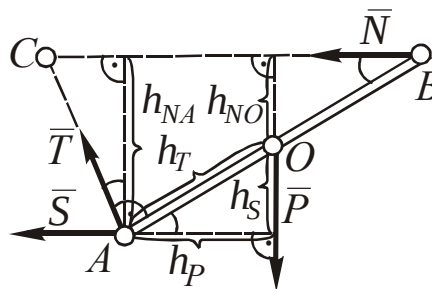


Рис. 1.50

3. Координатные оси располагаем стандартно. Центр в расчетном уравнении моментов выбираем на пересечении сил $\bar{T}$ и $\bar{S}$ – в точке A (формально подходит также точка C на пересечении $\bar{N}$ и $\bar{T}$). Центр в проверочном уравнении моментов выбираем в точке O (через нее не проходит ни одна из неизвестных сил $\bar{N}$, $\bar{T}$, $\bar{S}$ и проходит известная сила $\bar{P}$). Выделяем точки A и O на чертеже.

Сила $\bar{N}$ параллельна противоположна x : $N_x = -N$, $N_y = 0$. Плечи $h_{NA} = AB \sin 30^\circ$, $h_{NO} = 0,5AB \sin 30^\circ$, поворот обоих плеч вокруг неподвижных точек – против ч. с. (знаки моментов «+»).

Сила $\bar{S}$ сонаправлена с $\bar{N}$: $S_x = -S$, $S_y = 0$. $m_A(\bar{S}) = 0$ (сила проходит через A), плечо относительно O : $h_S = 0,5AB \sin 30^\circ$, поворот – по ч. с. (знак момента «-»).

Сила $\bar{P}$ параллельна противоположна y : $P_y = -P$; $P_x = m_O(P) = 0$ (сила проходит через O), плечо относительно A : $h_P = 0,5AB \cos 30^\circ$, поворот – по ч.с. (знак момента «-»).

Линия силы $\bar{T}$ под углом 30° к оси y , угол с x тупой, с y – острый: $T_y = T \cos 30^\circ$, $T_x = -T \sin 30^\circ$. $m_A(\bar{T}) = 0$ (сила проходит через A), плечо относительно O : $h_T = 0,5AB$, поворот плеча – по ч. с. (знак момента «-»).

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -N - S - T \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = N \cancel{AB} \sin 30^\circ - 0,5P \cancel{AB} \cos 30^\circ = 0;$$

$\sum m_O(\bar{F}_k) = 0,5 N \cancel{AB} \sin 30^\circ - 0,5S \cancel{AB} \sin 30^\circ - 0,5T \cancel{AB} = 0$ (проверка).

В уравнениях моментов производим сокращение на общий размер AB .

4. Решая систему расчетных уравнений, получаем: $S = -1,43P$ (стержень сжат); $T = 1,15P$; $N = 0,86P$.

5. Находим среднее значение модулей реакций: $R_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(1,43 + 1,15 + 0,86)P = 1,15P$. Подставляем корни в проверочное уравнение, полученная сумма составляет $\Sigma m_O(\bar{F}_k) = -0,0025P$, что по модулю меньше $0,01R_{\text{ср}}$, следовательно, расчет верен.

Пример 2. Силы, связи и геометрические данные указаны на чертеже. Составить уравнения для определения реакций связей и их проверки (рис. 1.51).

Решение. 1. Рассматриваем равновесие изогнутого стержня $ABCDE$.

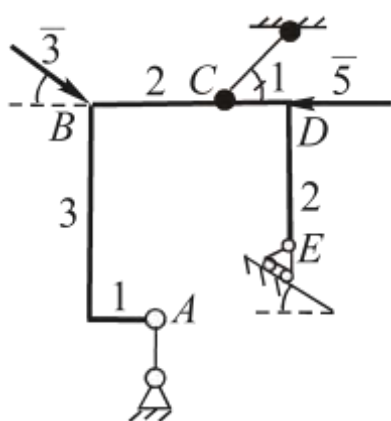


Рис. 1.51

2. Реакции стержня $\bar{S}$ и нити $\bar{T}$ направляем вдоль связей соответственно от точек A и C , реакцию подвижного шарнира $\bar{N}$ – перпендикулярно к опорной поверхности.

Рабочий чертеж показан на рис. 1.52.

3. Координатные оси располагаем стандартно (на чертеже не показаны). Центр расчетного уравнения моментов выбираем на пересечении сил $\bar{T}$ и $\bar{S}$ (точка O). Центр проверочного уравнения – точка B (силы $\bar{T}$, $\bar{N}$, $\bar{S}$ через нее не проходят, а известные силы $\bar{3}$ и $\bar{5}$ в ней пересекаются). Выделяем O и B на чертеже.

Сила $\bar{5}$ параллельна противоположна x :

$5_x = -5$, $5_y = 0$. $m_B(\bar{5}) = 0$ (сила проходит через B), плечо относительно O : $h_5 = 1$, поворот плеча против ч. с. (знак момента «+»).

Линия силы $\bar{T}$ составляет с x 45° , углы с x и y острые: $T_x = T \cos 45$, $T_y = T \sin 45$. $m_O(\bar{T}) = 0$ (сила проходит через O). Для определения $m_B(\bar{T})$ рассмотрим составляющие $\bar{T}_x$ и $\bar{T}_y$. $m_B(\bar{T}_x) = 0$

(сила проходит через B), плечо $\bar{T}_y$ относительно B : $h_{Ty} = 2$, поворот плеча против ч. с. (знак момента «+»).

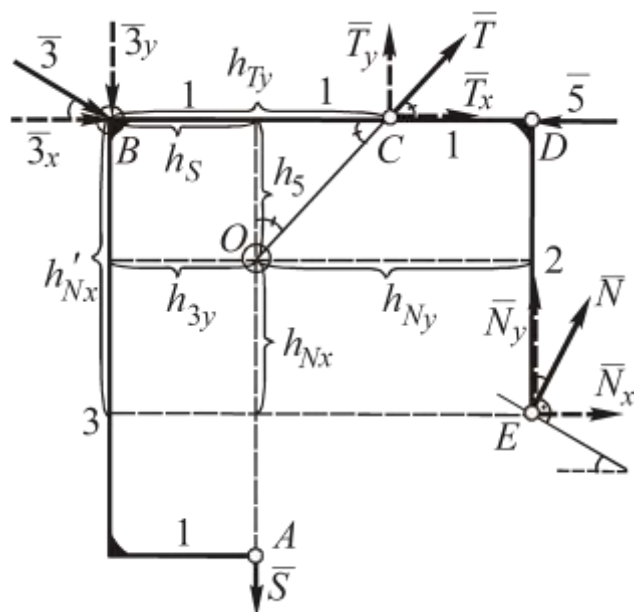


Рис. 1.52

Линия силы $\bar{3}$ составляет с x 30° , угол с x острый, с y тупой: $3_x = 3 \cos 30$, $3_y = -3 \sin 30$, $m_B(\bar{3}) = 0$ (сила проходит через B). Для определения $m_O(\bar{3})$ рассмотрим составляющие $\bar{3}_x$ и $\bar{3}_y$. Плечо $\bar{3}_x$ относительно O : $h_5 = 1$, поворот плеча по ч. с. (знак момента «-»), плечо $\bar{3}_y$ относительно O : $h_{3y} = 1$, поворот плеча против ч.с. (знак момента «+»).

Сила $\bar{S}$ параллельна противоположна оси y : $S_y = -S$, $S_x = 0$. $m_O(\bar{S}) = 0$ (сила проходит через точку O). Плечо S относительно B : $h_S = 1$, поворот плеча по ч. с. (знак момента «-»).

Линия силы $\bar{N}$ составляет с y 30° , углы с x и y острые: $N_y = N \cos 30$, $N_x = N \sin 30$. Для определения моментов $\bar{N}$ рассмотрим составляющие $\bar{N}_x$ и $\bar{N}_y$. Плечи $\bar{N}_x$ относительно O и B соответственно $h_{Nx} = 1$ и $h'_{Nx} = 2$, поворот обоих плеч против ч. с. (знаки моментов «+»). Плечи $\bar{N}_y$ относительно O и B соответственно $h_{Ny} = 2$ и $BD = 3$, поворот обоих плеч против ч. с. (знаки моментов «+»).

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -5 + T \cos 45 + 3 \cos 30 + N \sin 30 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = T \sin 45 - 3 \sin 30 - S + N \cos 30 = 0;$$

$$\sum m_O(\bar{F}_k) = 5 \cdot 1 - 3 \cos 30 \cdot 1 + 3 \sin 30 \cdot 1 + N \sin 30 \cdot 1 + N \cos 30 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = T \sin 45 \cdot 2 - S \cdot 1 + N \sin 30 \cdot 2 + N \cos 30 \cdot 3 = 0 \text{ (проверка)}.$$

Пример 3. Величины q , P_1 , P_2 , m , а также все необходимые размеры известны. Составить уравнения для определения реакций связей и проверки (рис. 1.53).

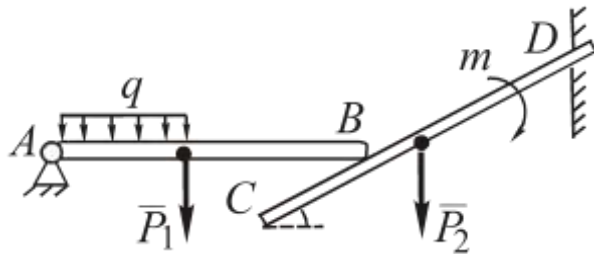


Рис. 1.53

Решение. 1. Рассмотрим равновесие системы тел $AB + CD$, которую разделим на отдельные тела.

2. К телу AB приложены: сила тяжести $\bar{P}_1$, реакция неподвижного шарнира A (указываем ее составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$), реакция $\bar{N}$ гладкой поверхности стержня CD , перпендикулярная к нему, сосредоточенная сила $Q = q \cdot 0,5AB$, эквивалентная распределенной нагрузке (п. 1.1.1, поз. 2). К телу CD приложены: сила тяжести $\bar{P}_2$, активная пара сил с моментом m , реакция $\bar{N}'$ гладкой поверхности стержня AB ($\bar{N}'$ противоположна $\bar{N}$, $N' = N$ по аксиоме действия и противодействия, п. 1.1.2, поз. 3), реакция жесткой заделки в точке D (комбинация составляющих $\bar{X}_D$, $\bar{Y}_D$ и пары сил с неизвестным реактивным моментом m_D).

Рабочий чертеж показан на рис. 1.54.

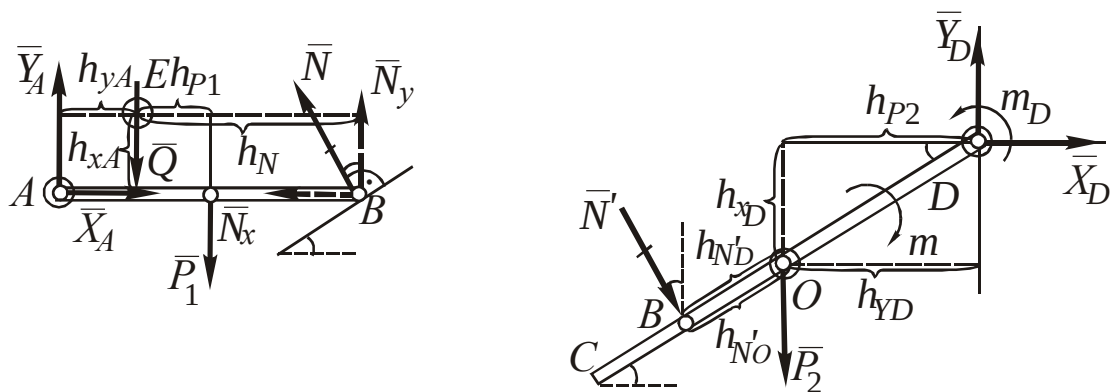


Рис. 1.54

3. Оси x и y расположены стандартно. Центры расчетных уравнений моментов удобнее всего выбрать в точках A и D приложения неподвижного шарнира и жесткой заделки. Центры проверочных уравнений: на линии действия силы $\bar{Q}$ в точке E на

расстоянии $0,25AB$ от стержня (при выборе центра на стержне AB не будет проверена сила $\bar{X}_A$) и в центре O стержня CD .

Проекции и моменты сил $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{P}_1, \bar{N}, \bar{N}', \bar{P}_2, \bar{X}_D$ и $\bar{Y}_D$ найдены аналогично ранее рассмотренным примерам (необходимые углы и плечи сил указаны на рис. 1.54). Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю, а сумма моментов относительно любого центра – моменту пары (п. 1.2.3), поэтому в обоих уравнениях моментов для тела CD следует записать « $m_D - m$ ». Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} AB: \sum F_{kx} &= X_A - N \sin 30 = 0; \\ \sum F_{ky} &= Y_A - Q - P_1 + N \cos 30 = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -Q \cdot 0,25AB - P_1 \cdot 0,5AB + N \cos 30 \cdot AB = 0; \\ \sum m_E(\bar{F}_k) &= X_A \cdot 0,25AB - Y_A \cdot 0,25AB - P_1 \cdot 0,5AB - \\ &- N \sin 30 \cdot 0,25AB + N \cos 30 \cdot 0,75AB = 0 \text{ (проверка);} \\ CD: \sum F_{kx} &= X_D + N \sin 30 = 0; \\ \sum F_{ky} &= Y_D - P_2 - N \cos 30 = 0; \\ \sum m_D(\bar{F}_k) &= P_2 \cdot 0,5CD \cos 30 + N \cdot 0,75CD + m_D - m = 0; \\ \sum m_O(\bar{F}_k) &= -X_D \cdot 0,5CD \sin 30 + Y_D \cdot 0,5CD \cos 30 + \\ &+ N \cdot 0,25CD + m_D - m = 0 \text{ (проверка).} \end{aligned}$$

В третьем и четвертом уравнениях можно провести сокращения на величину AB .

Пример 4. Однородный стержень весом $\bar{P}$ опирается на шероховатый пол и стенку и удерживается в равновесии под углом α . Составить уравнения равновесия для определения давления стержня на опорные поверхности и коэффициента трения (рис. 1.55).

Решение. 1. Рассматриваем равновесие стержня AB .

2. Силу тяжести $\bar{P}$ прикладываем в центре O стержня, а в точках A и B – реакции шероховатых поверхностей: $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ перпендикулярны им, $\bar{F}_{\text{тр}A}$ и $\bar{F}_{\text{тр}B}$ вдоль поверхностей в произвольных направлениях (п. 1.1.4).

Рабочий чертеж показан на рис. 1.56.

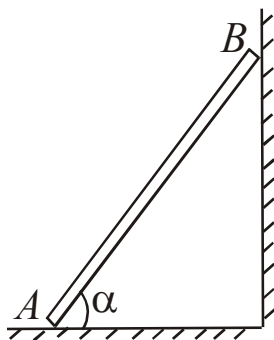


Рис. 4.16

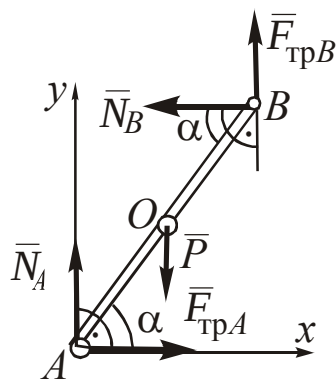


Рис. 4.17

3. Составляем уравнения равновесия: проекций на оси x и y , моментов относительно центра A (расчетное) и O (проверочное). Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\sum F_{kx} = F_{\text{тр}A} - N_B = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N_A - P + F_{\text{тр}B} = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -P \cdot 0,5AB \cos \alpha + N_B \cdot AB \sin \alpha + F_{\text{тр}B} \cdot AB \cos \alpha = 0;$$

$$\sum m_O(\bar{F}_k) = F_{\text{тр}A} \cdot 0,5AB \sin \alpha - N_A \cdot 0,5AB \cos \alpha +$$

$$+ N_B \cdot 0,5AB \sin \alpha + F_{\text{тр}B} \cdot 0,5AB \cos \alpha = 0 \text{ (проверочное)}.$$

Произведем сокращение в третьем уравнении на AB , в четвертом – на $0,5AB$.

Три расчетные уравнения дополняют формулами, определяющими величины сил трения скольжения (п. 1.4): $F_{\text{тр}A} = f N_A$; $F_{\text{тр}B} = f N_B$. Таким образом, получают систему из пяти уравнений с пятью неизвестными. Данную систему уравнений решают относительно N_A , N_B и f .

Примечание: давления стержня на опорные поверхности в точках A и B $\bar{N}'_A$ и $\bar{N}'_B$ по аксиоме действия и противодействия (п. 1.1.2, поз. 3) равны по величине и противоположны соответствующим реакциям $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$.

1.4.4. Центр тяжести однородного плоского тела

Наиболее распространенным и универсальным способом расчета координат центра тяжести тела является способ разбиений, предусматривающий следующий порядок решения.

1. Плоскую фигуру разбивают на элементы, имеющие центр геометрической симметрии, или стандартные тела, координаты центров тяжести которых вычисляются по известным формулам (дуга окружности, круговой сектор (п. 2.6) и т. п.). В ряде случаев целесообразно *дополнять* реальные элементы до симметричных тел, при этом площадь или длину дополненной части тела считают *отрицательной*.

2. Указывают расположение центров тяжести каждого из элементов, определяют их площади S_k (длины L_k) и координаты x_k, y_k центров тяжести. Если рассматриваемым элементом является дуга окружности или круговой сектор, то следует учитывать, что соответствующие координаты отсчитывают *от центра окружности* по оси симметрии. Центр тяжести треугольника делит его медианы в отношении 1:2. При большом количестве элементов результаты расчетов рекомендуется фиксировать в виде таблицы.

3. Результаты расчетов подставляют в формулы (п. 2.6):

$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{\sum S_k}, \quad y_C = \frac{\sum y_k S_k}{\sum S_k} \quad \text{или} \quad x_C = \frac{\sum x_k L_k}{\sum L_k}, \quad y_C = \frac{\sum y_k L_k}{\sum L_k}.$$

По полученным координатам x_C, y_C определяют положение точки C .

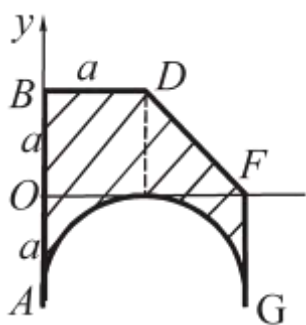


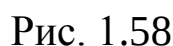
Рис. 1.57

Пример 1. Определить центр тяжести однородной пластины $ABDFG$ (рис. 1.57).

Решение. 1. Разделяем пластину на три элемента: 1 – прямоугольную пластину $ABEG$, применяя *дополнение* (центр тяжести C_1 расположен в пересечении диагоналей); 2 – треугольник DEF (его площадь отрицательна, центр тяжести C_2 расположен в пересечении медиан); 3 – полуокружность

ANG (площадь отрицательна, центр тяжести C_3 расположен на оси симметрии) (рис. 1.58).

2. Координаты x_1, y_1, x_3 очевидны. Определяем остальные координаты:



$$y_3 = -(O_1H - C_3) =$$

$$= -\left(a - \frac{2}{3}a \frac{\sin \pi/2}{\pi/2}\right) = -0,58a.$$

Результаты расчетов сводим в таблицу:

k	x_k	y_k	S_k
1	a	0	$4a^2$
2	$1,67a$	$0,67a$	$-0,5a^2$
3	a	$-0,58a$	$-1,57a^2$

3. Определяем координаты x_C и y_C центра тяжести пластины:

$$y_C = \frac{0 \cdot 4a^2 - 0,67a \cdot 0,5a^2 + 0,58a \cdot 1,57a^2}{a^2(4 - 0,5 - 1,57)} = 0,3a.$$

Указываем на рис. 1.58 точку $C(0,83a; 0,3a)$.

Пример 2. Определить центр тяжести проволочной фигуры $OABDE$ (рис. 1.59).

Решение. 1. Разделяем фигуру на четыре элемента: 1 – отрезок AB ; 2 – отрезок OB ; 3 – отрезок BE ; 4 – дугу BD .

Центры тяжести C_1 – C_3 отрезков находятся в их серединах, C_4 дуги – на оси симметрии (рис. 1.60).

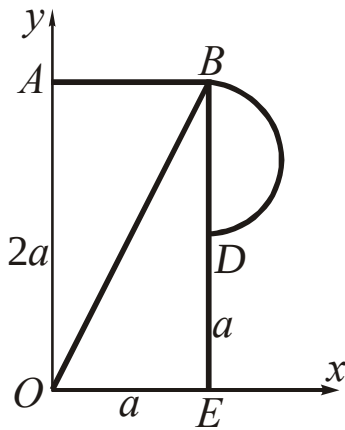


Рис. 1.59

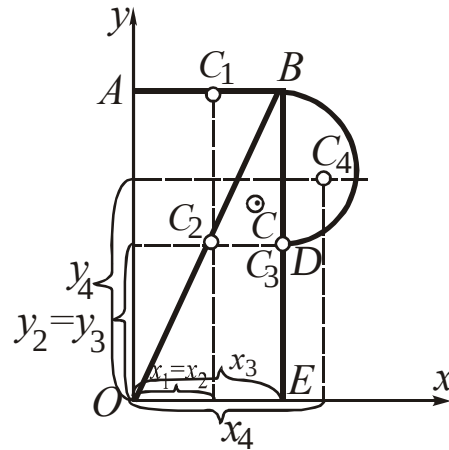


Рис. 1.60

Координаты x_1-x_3 и y_1-y_4 очевидны, $x_4 = a + \frac{a \sin \pi/2}{2 \pi/2} = 1,32a$.

Результаты расчетов:

k	x_k	y_k	l_k
1	0,5a	2a	a
2	0,5a	a	2,24a
3	a	a	2a
4	1,32a	1,52a	1,57a

3. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_C = \frac{0,5a \cdot a + 0,5a \cdot 2,24a + a \cdot 2a + 1,32a \cdot 1,57a}{a(1 + 2,24 + 2 + 1,57)} = 0,84a;$$

$$y_C = \frac{2a \cdot a + a \cdot 2,24a + a \cdot 2a + 1,5a \cdot 1,57a}{a(1 + 2,24 + 2 + 1,57)} = 1,26a.$$

Указываем на рис. 1.60 точку $C(0,84a; 1,26a)$.

1.5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Кинематикой называют раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их масс и действующих на них сил. При этом под движением понимают изменение с течением времени положения тела в пространстве относительно системы отсчета.

1.5.1. Способы задания движения точки

Задать движение точки (тела) означает каким-либо способом определить положение точки (тела) в пространстве *в любой момент времени*.

Различают три основных способа задания движения точки (по существу они являются аксиомами кинематики): естественный, координатный, векторный.

При *естественном* способе задают (рис. 1.61):

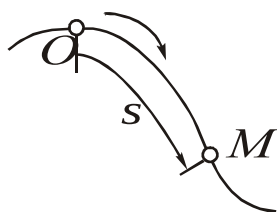


Рис. 1.61

– *траекторию*, то есть линию, по которой происходит движение точки M (ее можно задать аналитически уравнением или графически);

– *начало отсчета* на траектории (O) и направление положительного отсчета ($\rightarrow$ или $+$);

– *закон движения* точки по траектории $s = s(t)$, где s – «дуговая» координата; t – время.

Следует отличать координату s , которая может, как возрастать, так и убывать и иметь отрицательные значения, от «пути», который представляет собой неубывающую величину, равную сумме элементарных отрезков, проходимых точкой.

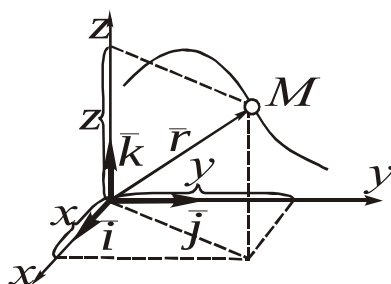


Рис. 1.62

При *координатном* способе задают функции (уравнения) координат точки, чаще всего, прямоугольных (рис. 1.62):

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

При *векторном* способе задают вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис. 5.2).

Сравнительная оценка способов задания движения точки:

– векторный способ наиболее просто осуществим математически, так как достаточно задать одно уравнение, однако он наименее нагляден;

– естественный способ требует наибольшего объема информации, но он наиболее нагляден, поэтому он чаще других применяется для практических целей (например, графики движения по-

ездов, прохождения маршрута в турпоходе);

– координатный способ обеспечивает наиболее простой расчет скорости и ускорения точки (п. 1.5.2), поэтому в задачах кинематики точки движение чаще всего задается именно этим способом.

Переход от координатного способа к векторному обеспечивается с помощью единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 1.62):

$$\bar{r}(t) = \bar{i}x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t).$$

Переход от координатного способа к естественному включает:

– определение уравнения траектории путем исключения параметра t в уравнениях движения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \Rightarrow f(x, y, z) = 0$$

или построение траектории графически по координатам точки в задаваемые моменты времени t ;

– за начало отсчета O целесообразно принимать начальную точку M_O с координатами $x_O = x(t)|_{t=0}$; $y_O = y(t)|_{t=0}$; $z_O = z(t)|_{t=0}$, направление положительного отсчета совпадает с направлением вектора скорости $\bar{V}_O$ в момент $t = 0$;

– закон движения по траектории вычисляют через функцию скорости (п. 1.5.2)

$$s(t) = \int_0^t V(t) dt = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

1.5.2. Скорость и ускорение точки

Скорость и ускорение точки – *пространственно-временные характеристики* ее движения. Под *скоростью* понимают вектор $\bar{V}$, характеризующий быстроту изменения положения точки с течением времени, под *ускорением* – вектор $\bar{a}$, характеризующий быстроту изменения скорости.

1.5.2.1. Координатный способ

Используем уравнение перехода от координатного способа к векторному (п. 1.5.1):

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}.$$

Выразим вектор $\bar{V}$ через его проекции на координатные оси:

$$\bar{V} = \bar{i}V_x + \bar{j}V_y + \bar{k}V_z.$$

Сопоставляя эти два уравнения, получим

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z},$$

то есть проекции вектора скорости равны соответствующим производным по времени от функций координат точки.

По найденным проекциям можно определить величину и направление (направляющие косинусы) вектора $\bar{V}$:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{V}; \quad \cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{z}}{V}.$$

Аналогично определяют проекции, величину и направление вектора ускорения $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \Rightarrow a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Вместо направляющих косинусов при решении задач при-

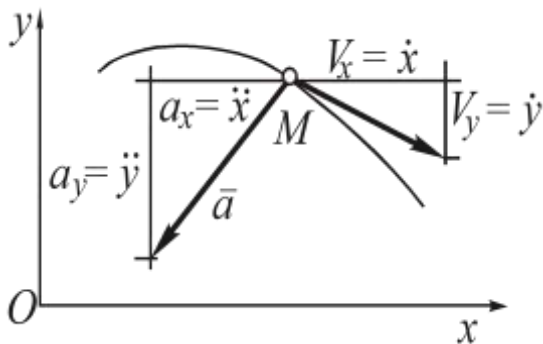


Рис. 1.63

меняют графическое построение векторов $\bar{V}$ и $\bar{a}$ по проекциям (рис. 1.63): выбрав масштабы, из расчетного положения точки M откладывают соответствующие проекции с учетом их знаков и соединяют точку M с концами построений.

1.5.2.2. Естественный способ

Принципиальным отличием естественного способа является

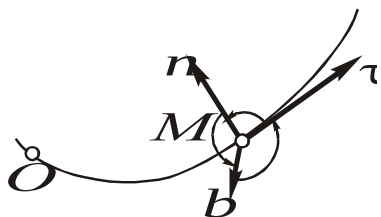


Рис. 1.64

то, для определения векторов $\bar{V}$ и $\bar{a}$ применяют координатные оси, которые ориентированы определенным образом относительно траектории и *перемещаются по ней вместе с точкой* (эти оси называют подвижными или естественными) (рис. 1.64):

$M\tau$ – касательная, направленная по касательной к траектории в сторону от начала отсчета O ;

Mn – главная нормаль, направленная в соприкасающейся плоскости τMn перпендикулярно к оси $M\tau$ в сторону вогнутости траектории;

Mb – бинормаль, направленная перпендикулярно к плоскости τMn в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение τ с n видно против часовой стрелки.

Оси τ , n , b образуют естественные координатные плоскости: τMn – соприкасающуюся; nMb – нормальную; τMb – спрямляющую.

Из п. 1.5.2.1 следует, что вектор $\bar{V}$ направлен по касательной τ , а вектор $\bar{a}$ расположен в соприкасающейся плоскости τMn (проекция на бинормаль a_b равна нулю).

Определим проекции векторов $\bar{V}$ и $\bar{a}$ на естественные оси.

Аналогично п. 1.5.2.1 рассмотрим положения M_1 и M_2 точки в моменты t_1 , t_2 и воспользуемся ранее полученным выражением для $\bar{V}$ и $\bar{a}$:

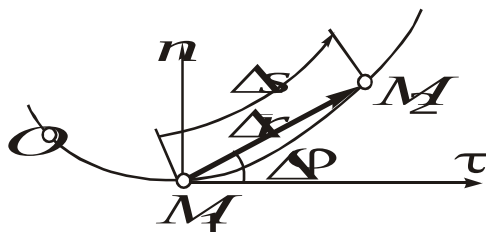


Рис. 1.65

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

В проекциях на ось τ
(рис. 1.65)

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r \cos \Delta \varphi}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta r \rightarrow \Delta s$, $\cos \Delta \varphi \rightarrow 1$,

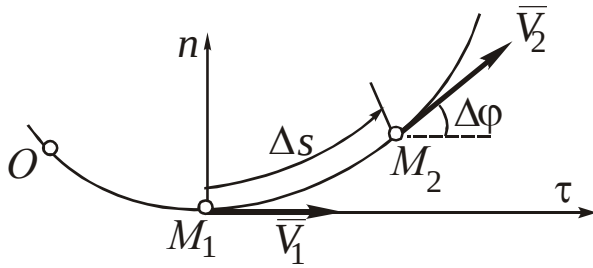


Рис. 1.66

тора $\bar{a}$ на оси τ и n (рис. 1.66):

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{\Delta t};$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 \sin \Delta \varphi}{\Delta t};$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 \cos \Delta \varphi - V_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \ddot{s}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$: $V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V$, $\sin \Delta \varphi \rightarrow \Delta \varphi$. Преобразуя выражение для a_n , получим

$$a_n = V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \Delta s}{\Delta t \Delta s} = V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории в расчетной точке M , характеризующий отклонение вектора $\bar{V}$ от касательной в соседней с M точке. Физический смысл ρ состоит в том, что он равен радиусу окружности, наиболее плотно прилегающей к траектории в расчетной точке (для окружности радиуса R во всех точках $\rho = R$, для прямой $\rho \rightarrow \infty$, для остальных кривых ρ можно вычислить, зная уравнение траектории).

Введем составляющие вектора $\bar{a}$, направленные по осям τ и n и равные по модулю соответствующим проекциям a_n и a_τ :

$\bar{a}_\tau$ – касательное (тангенциальное) ускорение, характеризующее изменение скорости по величине, при $a_\tau = \dot{V} > 0$ $\bar{a}_\tau$ направлен в сторону оси τ , при $a_\tau < 0$ – противоположно;

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

то есть скорость точки равна первой производной по времени от функции $s(t)$. При $\dot{s} > 0$ вектор $\bar{V}$ направлен в сторону оси τ , при $\dot{s} < 0$ – противоположно.

Рассмотрим проекции век-

$\bar{a}_n$ – нормальное (центростремительное) ускорение, характеризующее изменение скорости по направлению, так как $a_n = \frac{V^2}{\rho} \geq 0$, то есть неотрицательно, $\bar{a}_n$ всегда направлено в сторону оси n .

Полное ускорение $\bar{a}$ определяют через составляющие (рис. 1.67):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$\cos \left(\bar{a}, \tau \right) = \frac{a_\tau}{a}.$$

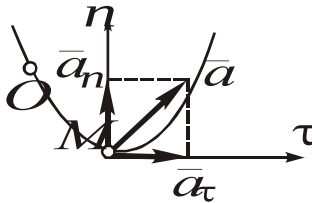


Рис. 1.67

Ускорения a_τ и a_n можно получить через функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при координатном способе задания движения. Например, при движении в плоскости ($z = \text{const}$):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V};$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \dots = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{V}.$$

(в последнем уравнении промежуточные преобразования опущены).

1.5.3. Виды движения точки

В зависимости от вида траектории точки различают следующие виды ее движения:

– при $\rho(t) = \text{const} \rightarrow \infty$ – прямолинейное (рис. 1.68); траекторией точки является прямая (луч, отрезок),

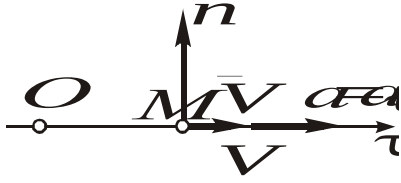


Рис. 1.68

$$a_n(t) = \frac{V^2(t)}{\rho(t)} = \text{const} = 0,$$

то есть в любой момент времени векторы $\bar{V}$ и $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ направлены *по траектории*;

– при $\rho(t) = \text{const} = R$ – движение по окружности (рис. 1.69); траекторией точки является окружность радиуса R ,

$$a_n(t) = \frac{V^2(t)}{R},$$

так как ось n проходит через центр окружности O_1 , вектор $\bar{a}_n$ направлен к O_1 , векторы $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ направлены перпендикулярно к MO_1 ;

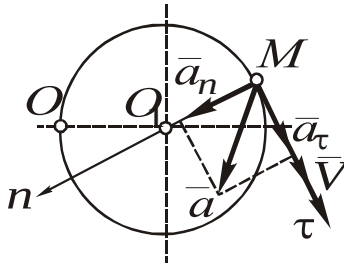


Рис. 1.69

– при $\rho(t) \neq \text{const}$ – криволинейное.

В зависимости от закона изменения касательного ускорения $a_\tau = a_\tau(t)$ различают следующие виды движения:

– $a_\tau(t) = \text{const} = 0$ – равномерное, для которого функции $V(t)$ и $s(t)$

можно получить интегрированием, используя выражения из п. 5.2.3

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \int dV = 0 \Rightarrow V(t) = V_0;$$

$$\frac{ds}{dt} = V_0 \Rightarrow \int ds = \int V_0 dt \Rightarrow s(t) = V_0 t + s_0,$$

где V_0, s_0 – соответственно начальные скорость и координата;

– $a_\tau(t) = \text{const} \neq 0$ – равнопеременное

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau \Rightarrow \int dV = \int a_\tau dt \Rightarrow V(t) = a_\tau t + V_0;$$

$$\frac{ds}{dt} = a_\tau t + V_0 \Rightarrow \int ds = \int (a_\tau t + V_0) dt \Rightarrow s(t) = a_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0;$$

– $a_\tau(t) \neq \text{const}$ – *неравнопеременное*.

В зависимости от направлений векторов $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ в расчетный момент t (в зависимости от знаков производных $\dot{s}$ и $\dot{V}$) различают:

– $\bar{V} \uparrow\uparrow \bar{a}_\tau$ ($\dot{s} > 0, \dot{V} > 0$ или $\dot{s} < 0, \dot{V} < 0$) – *ускоренное движение*;

– $\bar{V} \uparrow\downarrow \bar{a}_\tau$ ($\dot{s} > 0, \dot{V} < 0$ или $\dot{s} < 0, \dot{V} > 0$) – *замедленное движение*.

Рассмотренные признаки движения точки могут применяться отдельно или в комплексе (например, движение точки по окружности, неравнопеременное, ускоренное в момент t_1 и замедленное в момент t_2).

1.6. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел теоретической механики, в котором рассматриваются законы движения материальных тел с учетом их масс и действующих на них сил. Динамика – заключительный раздел классической механики, в нем используются знания о силах из статики и свойствах движения тел из кинематики.

Традиционно данный раздел начинают с изучения движения простейшего тела – *материальной точки*.

1.6.1. Законы динамики

Рассмотренные ниже законы являются *аксиомами* динамики. Они изложены впервые И. Ньютоном в 1687 г.

Основной закон динамики – произведение массы материальной точки на вектор ее ускорения равно вектору силы, вызывающей это ускорение:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (6.1)$$

Масса m является мерой механической инертности материальной точки (т. е. способности ее сохранять движение или состояния покоя). Инертная масса равна гравитационной массе тела, входящей в закон тяготения, что впервые было экспериментально доказано советскими учеными путем точных измерений.

Единицей размерности в СИ является килограмм (кг). При заданном весе тела P массу определяют через ускорение свободного падения ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$):

$$m = \frac{P}{g}.$$

Из основного закона выводят все теоремы динамики материальной точки и механической системы, поэтому его можно считать *основой динамики*.

Свойства основного закона.

1. При действии на точку системы сил $\vec{F}_k$ ($k = 1 \dots n$) последняя эквивалентна равнодействующей $\vec{R}$ (т. к. силы сходящиеся):

$$m\vec{a} = \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (6.2)$$

2. Независимость действия сил: каждая из действующих на точку сил сообщает ей такое же ускорение, какое сообщала бы, действуя изолированно (в отдельных учебниках это свойство рассматривается как отдельный закон динамики). Для случая двух сил это свойство следует из правила разложения вектора $\vec{a}$ по направлениям сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 1.70).

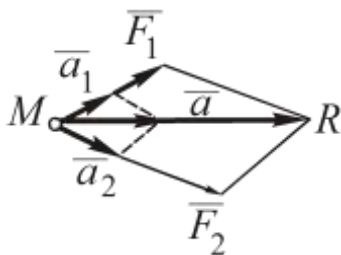


Рис. 1.70

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 \Rightarrow m\vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m\vec{a} &= \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow m\vec{a}_2 = \vec{F}_2. \end{aligned}$$

3. Ускорение $\vec{a}$ можно представить в дифференциальной форме:

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (6.3)$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме*.

Закон инерции – материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока оно не будет изменено действующими на нее силами.

Данный закон может быть получен из основного закона:

$$\text{при } \sum \vec{F}_k = 0 \Rightarrow m\vec{a} = 0 \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0;$$

$a_n = 0$, т. е. движение точки прямолинейное ($\rho \rightarrow \infty$);

$a_\tau = 0$, т. е. движение равномерное ($V = \text{const}$).

Значение данного закона состоит в том, что на его основе вводят понятия *инерциальной системы отсчета*, относительно которой выполняется закон инерции (а, значит, и основной закон динамики). Известны следующие инерциальные системы отсчета:

- *звездная* (за начало принята любая из звезд, а оси направлены на 3 другие звезды), данная система близка к идеальной инерциальной, т. к. ближайшие звезды находятся на расстоянии порядка 10^{13} – 10^{14} км, поэтому гравитационные силы пренебрежимо малы, а сами звезды практически неподвижны;

- *солнечная или гелиоцентрическая* (за начало которой принято Солнце, ближайшая к нам звезда);

- *земная или геоцентрическая* (жестко связанная с планетой Земля), данная система дает значительную погрешность ввиду годового и суточного движения Земли вокруг Солнца, однако в большинстве инженерных задач механики ею можно пренебречь.

Закон действия и противодействия – всякое действие одного тела на другое сопровождается равным по величине и обратным по направлению противодействием. Например, при скатыва-

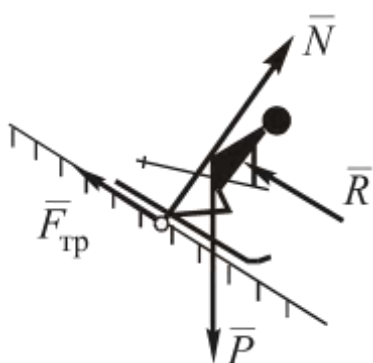


Рис. 1.71

нии лыжника с горы силами действия являются: вес $\bar{P}$, реакция $\bar{N}$, $\bar{F}_{\text{тр}}$ поверхности горы, сопротивление $\bar{R}$ воздуха. Силы противодействия приложены соответственно к планете Земля, поверхности горы и воздуху. Силы действия и противодействия не уравновешены, т. к. приложены к разным телам (рис. 1.71).

1.6.2. Импульс и работа силы

Наряду с мерами движения МТ в динамике вводят динамические характеристики силы, увязывающие ее с временем действия и перемещением точки: импульс и работа силы.

Элементарный импульс силы $\bar{F}$ – произведение $\bar{F}$ на элементарный интервал времени dt : $d\bar{S}_F = \bar{F} dt$.

Полный импульс $\bar{S}_F$ равен сумме (интегралу) от элементарных импульсов на произвольном интервале времени от 0 до t :

$$\bar{S}_F(t) = \int_0^t d\bar{S}_F = \int_0^t \bar{F}(t) dt. \quad (6.4)$$

Если сила постоянна по величине и направлению ($\bar{F} = \text{const}$), из (6.4) следует $\bar{S}_F(t) = \bar{F}t$, т. е. векторы силы и ее импульса совпадают по направлению.

Единица размерности S_F в СИ: Н·с.

Элементарной работой силы $\bar{F}$ называют скалярное произведение $\bar{F}$ на вектор элементарного перемещения $d\bar{s}$ ($d\bar{s}$ совпадает с дифференциалом радиуса – вектора $d\bar{r}$) (рис. 1.72):

$$dA_F = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F ds \cos \alpha.$$

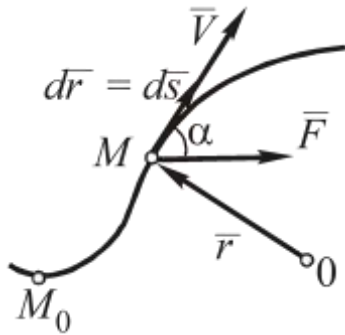


Рис. 1.72

Полная работа A_F равна сумме (интегралу) элементарных работ на произвольном интервале от M_0 до M :

$$A_F = \int_{M_0}^M dA_F = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (6.5)$$

В аналитической форме (через проекции векторов ($\bar{F}$ и $d\bar{r}$)) (6.5) имеет вид

$$A_F = \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz. \quad (6.6)$$

Мощностью силы называют отношение приращения работы к интервалу времени

$$N_F = \frac{dA_F}{dt} \text{ (мгновенная мощность);}$$

$$N_{F\text{ср}} = \frac{\Delta A_F}{\Delta t} \text{ (средняя мощность).}$$

Единицами размерности в СИ являются: работы – Н·м = Дж (джоуль), мощности силы – $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$ (ватт).

1.6.3. Примеры вычисления работ сил

1. Сила постоянна, точка движется прямолинейно.

При $\vec{F} = \text{const}$ из (6.5) следует

$$A_F = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha, \quad (6.7)$$

где $\Delta \vec{s}$ – вектор конечного перемещения точки, $\Delta s = \Delta x = M_0M$, α – угол между $\vec{F}$ и траекторией (осью x) (рис. 1.73).

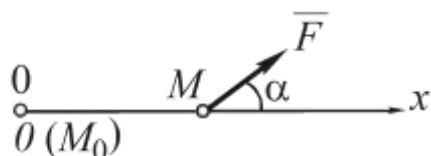


Рис. 1.73

При $\alpha < \frac{\pi}{2}$ $A_F > 0$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$A_F = 0$; при $\alpha > \frac{\pi}{2}$ $A_F < 0$, т. е. знак работы силы совпадает со знаком ее проекции на направление перемещения.

2. Работа силы тяжести. Так как $P_x = P_y = 0$, $P_z = -P$, из (9.10) следует

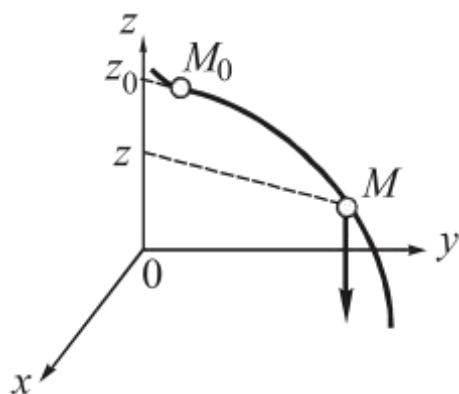


Рис. 1.74

$$A_p = - \int_{z_0}^z P dz = P(z_0 - z). \quad (6.8)$$

$A_p > 0$ при $z_0 > z$ (спуск по траектории); $A_p < 0$ при $(z_0 < z)$ (подъем); $A_p = 0$ при $z_0 = z$.

3. Работа силы трения. Из (6.7) и рис. 1.75 следует:

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \Delta s = -f N \Delta s. \quad (6.9)$$

Так как сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ противоположна перемещению, ее работа всегда отрицательна.

Примечание. При движении точки по наклонной поверхности под углом φ к горизонту работы сил $\vec{P}$, $\vec{N}$ и $F_{\text{тр}}$ выражают через φ (рис. 1.76):

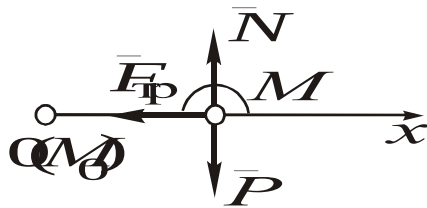


Рис. 1.75

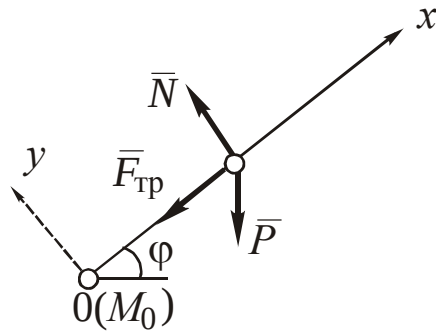


Рис. 1.76

$$A_P = P \cdot \Delta s \cos \alpha = -P \cdot \Delta x \cos (90 - \varphi) = -P \cdot \Delta x \sin \varphi; \quad (6.10)$$

$$A_N = P \cdot \Delta s \cos \pi / 2 = 0;$$

$$A_{\text{тр}} = -f N \Delta s = -f P \cos \varphi \Delta x, \quad (6.11)$$

(т. к. проецируя уравнение $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}$ на ось y , получаем $0 = -P \cos \varphi + N$ или $N = P \cos \varphi$), т. е. работа силы тяжести содержит $\sin \varphi$, силы трения — $\cos \varphi$, реакции гладкой поверхности — нулевая.

4. *Работа силы упругости.* Считая $M_H = 0$ положением, соответствующим недеформированной пружине, подставляя $F_y = Cx = C\lambda$, $ds = d\lambda$, $\cos \alpha = \cos \pi = -1$ в (6.5), получим

$$A_{F_y} = - \int_{\lambda_0}^{\lambda} C\lambda d\lambda = \frac{C}{2} (\lambda_0^2 - \lambda^2). \quad (6.12)$$

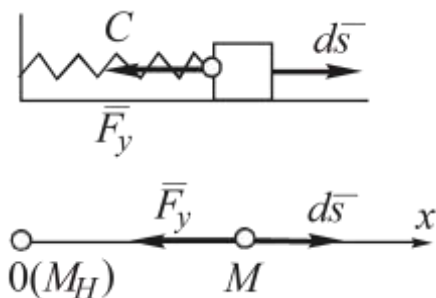


Рис. 1.77

При $\lambda_0 < \lambda$ (увеличение деформации) $A_{F_y} < 0$, при $\lambda_0 > \lambda$ (уменьшение деформации) $A_{F_y} > 0$, при $\lambda_0 = \lambda$ $A_{F_y} = 0$ (рис. 1.77).

5. Работа силы, приложенной к *вращающемуся телу* (рис. 1.78).

Из (6.5) с учетом $ds = OM \cdot d\varphi$:

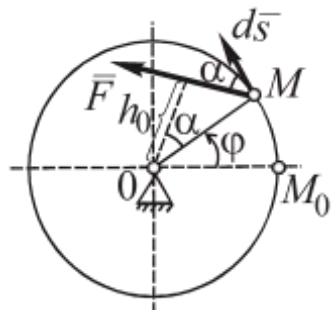


Рис. 1.78

$$A_F = \int_{M_0}^M F ds \cos \alpha = \int_0^\varphi F OM \cos \alpha d\varphi.$$

Т. к. $OM \cos \alpha = h_0$, а $Fh_0 = |m_0(\bar{F})|$,
получим:

$$A_F = \pm \int_0^\varphi |m_0(\bar{F})| d\varphi. \quad (6.13)$$

При $m_0(\bar{F}) = \text{const } t$

$$A_F = \pm m_0(\bar{F}) \Delta\varphi, \quad (6.14)$$

где $\Delta\varphi$ – угловое перемещение тела; знак «+» выбирают, если поворот плеча силы $\bar{F}$ совпадает с направлением φ ($\alpha < \pi/2$), «-» – в противном случае.

Работу пары сил с моментом m вычисляют аналогично (6.13) и (6.14)

$$A_m = \pm \int_0^\varphi |m| d\varphi; \quad A_m = \pm m \Delta\varphi. \quad (6.15)$$

1.6.4. Теоремы динамики материальной точки

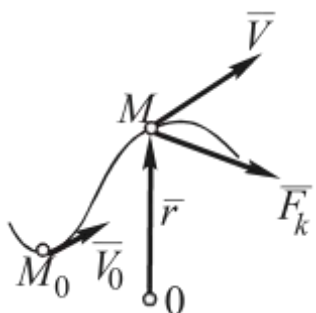


Рис. 1.79

Данные теоремы определяют закономерности изменения мер движения материальной точки, количества движения, кинетической энергии, кинетического момента. Все теоремы выводятся из основного закона динамики (рис. 1.79).

Теорема об изменении *количества движения МТ*

$$\begin{aligned}
m\bar{a} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m d\bar{V} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k dt \Rightarrow \int_{V_0}^V m d\bar{V} = \\
&= \sum_{k=1}^n \int_t^t \bar{F}_k dt \Rightarrow m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{Fk},
\end{aligned} \tag{6.16}$$

т. е. изменение количества движения МТ за некоторый интервал времени равно векторной сумме импульсов всех действующих на нее сил за тот же интервал времени.

Теорема об изменении *кинетической энергии МТ*

$$\begin{aligned}
m\bar{a} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = m \frac{d\bar{V} \cdot d\bar{r}}{d\bar{s} \cdot dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{s} \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_{V_0}^V m\bar{V} \cdot d\bar{V} &= \sum_{k=1}^n \int \bar{F}_k \cdot d\bar{s} \Rightarrow \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_{Fk},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

т. е. изменение кинетической энергии МТ при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на нее сил на том же перемещении.

Теорема об изменении *кинетического момента МТ*

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow \bar{r} \times m\bar{a} = \sum_{k=1}^n (\bar{r} \times \bar{F}_k) \Rightarrow \bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0 (\bar{F}_k).$$

$$\text{Так как } \frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m\bar{V})] = \frac{d}{dt} [\bar{r} \times m\bar{V}] = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} + \bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt},$$

$$\text{получаем } \frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m\bar{V})] = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k),$$

в проекциях на любую ось z:

$$\frac{d}{dt} [m_z (m\bar{V})] = \sum m_z (\bar{F}_k), \tag{6.18}$$

т. е. производная по времени от кинетического момента МТ относительно центра (оси) равна векторной (алгебраической) сумме моментов всех действующих на нее сил относительно этого центра (оси).

Использование теорем (6.16)–(6.18) позволяет в ряде случа-

ев сократить решение задач динамики МТ, поскольку они содержат результаты интегрирования дифференциального уравнения движения МТ.

РАЗДЕЛ 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

2.1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1.1. Внутренние усилия

Центральным растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором во всех поперечных сечениях бруса (стержня) действует только один внутренний силовой фактор – продольная сила N .

Продольная сила в любом поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на продольную ось стержня (которой является ось z). Растягивающие продольные силы принято считать положительными, сжимающие – отрицательными.

$$N = \sum_{\text{лев}} P_{z_i} = \sum_{\text{пр}} P_{z_i}. \quad (2.1)$$

2.1.2. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Коэффициент Пуассона

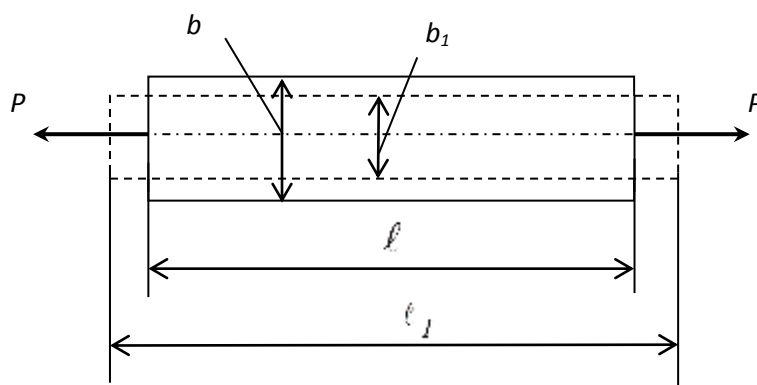


Рис. 2.1. Схема деформации стержня

Изменение длины стержня при растяжении и сжатии $\Delta \ell = \ell_1 - \ell$ называется абсолютной продольной деформацией (аб-

солютное удлинение или укорочение), а изменение поперечных размеров $\Delta b = b_1 - b$ – абсолютной поперечной деформацией (абсолютное сужение или расширение) (рис. 2.1).

Относительная продольная деформация ε (относительное удлинение или укорочение) равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_1 - \ell}{\ell}. \quad (2.2)$$

Аналогично выражается относительная поперечная деформация ε' (относительное сужение или относительное расширение)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b}. \quad (2.3)$$

Английский ученый Р. Гук в 1660 г. предложил названный его именем закон, устанавливающий связь между усилиями и деформациями в виде прямо пропорциональной зависимости. Современная формулировка закона Гука – при малых упругих деформациях относительные линейные продольные деформации при растяжении и сжатии пропорциональны нормальным напряжениям.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.4)$$

где E – модуль упругости первого рода, называемый еще модулем продольной упругости.

Закон Гука можно записать в другом виде:

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EF}, \quad (2.5)$$

где F – площадь поперечного сечения, EF – жесткость поперечного сечения при растяжении и сжатии.

Формулу (2.5) называют второй формой закона Гука.

В однородных изотропных материалах между продольными и поперечными деформациями существует взаимосвязь, выражающаяся числом μ , называемым коэффициентом поперечной деформации, или коэффициентом Пуассона. Французский математик и физик С. Д. Пуассон в 1829 г. установил, что продольные и поперечные, упругие деформации связаны прямо пропорциональной зависимостью $\varepsilon' = -\mu \varepsilon$.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.6)$$

2.1.3. Формула нормальных напряжений при растяжении – сжатии

Продольная сила N , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и связана с нормальными напряжениями зависимостью

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (2.7)$$

Опытное изучение деформаций растяжения или сжатия подтверждает гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли) – плоские сечения до деформации остаются плоскими в результате деформации (рис. 2.2).

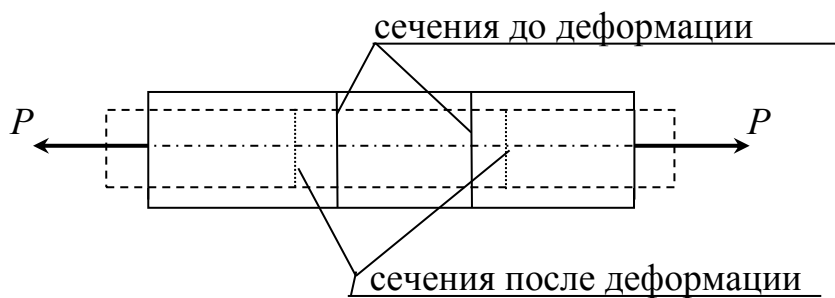


Рис. 2.2. Поведение стержня при растяжении

Это означает, что относительные удлинения всех продольных волокон одинаковы $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \text{const}$. Воспользуемся законом Гука $\sigma = E\varepsilon = \text{const}$. Учитывая, что σ постоянно, вернемся к выражению (2.7)

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma \int_F dF = \sigma F. \quad (2.8)$$

Тогда формула нормальных напряжений при растяжении и сжатии принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.9)$$

Условие прочности можно сформулировать, используя допускаемое напряжение. Если действующее напряжение в опас-

ных точках тела не превосходит допускаемого напряжения, то прочность этого тела обеспечивается с некоторым запасом. Условие прочности при растяжении и сжатии принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (2.10)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

С помощью условия (2.10) решаются три основных задачи сопротивления материалов.

1. Проверка прочности.

Известны все величины, входящие в условие прочности: дано $[\sigma]$, сечение F , из условий равновесия усилие N выражается через заданную нагрузку.

Сравниваем левую и правую части уравнения (2.10). Если левая часть меньше или равна правой, то условие прочности удовлетворяется.

2. Подбор сечения.

Известно $[\sigma]$ и N , требуется определить площадь поперечного сечения F .

Выражая F из (2.10), получим

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

3. Определение допускаемой нагрузки.

Дано: сечение F , допускаемое напряжение $[\sigma]$. Требуется определить нагрузку, которую выдержит конструкция $N_{\text{доп}}$. Из выражения (2.10) получим

$$N_{\text{доп}} \leq F[\sigma].$$

2.1.4. Пример

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием внешних сил P_1 и P_2 (рис. 2.3, а). Требуется: 1) построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений сечений δ ; 2) определить насколько изменится длина всего стержня если дано: $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 3,2$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Построение эпюры продольных сил

$$N = \sum_{\text{пр}} P_{zi} = \sum_{\text{лев}} P_{zi} :$$

$$N_{ED} = 0;$$

$$N_{DB} = P_2 = 3,2 \text{ кН};$$

$$N_{BA} = P_2 - P_1 = 3,2 - 2 = 1,2 \text{ кН}.$$

Эпюра продольных сил N приведена на рис. 2.3, б.

Условие прочности $\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$, отсюда $F \geq \frac{N}{[\sigma]}$.

Участок АВ

$$F = \frac{N_{AB}}{[\sigma]} = \frac{1,2}{160 \cdot 10^3} = 0,0075 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Участок ВС

$$F = \frac{N_{BC}}{[\sigma]} = \frac{3,2}{160 \cdot 10^3} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Участок ДС

$$1,5F = \frac{N_{ДС}}{[\sigma]}; F = \frac{N_{ДС}}{1,5[\sigma]} = \frac{3,2}{1,5 \cdot 160 \cdot 10^3} = 0,0133 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Окончательно принимаем $F = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Построение эпюры нормальных напряжений $\sigma = \frac{N}{F}$:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{0,02 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{F} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3}}{0,02 \cdot 10^{-3}} = 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{1,5F} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}} = 106,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{DE} = 0.$$

По данным значениям строим эпюру σ (рис. 2.3, в).

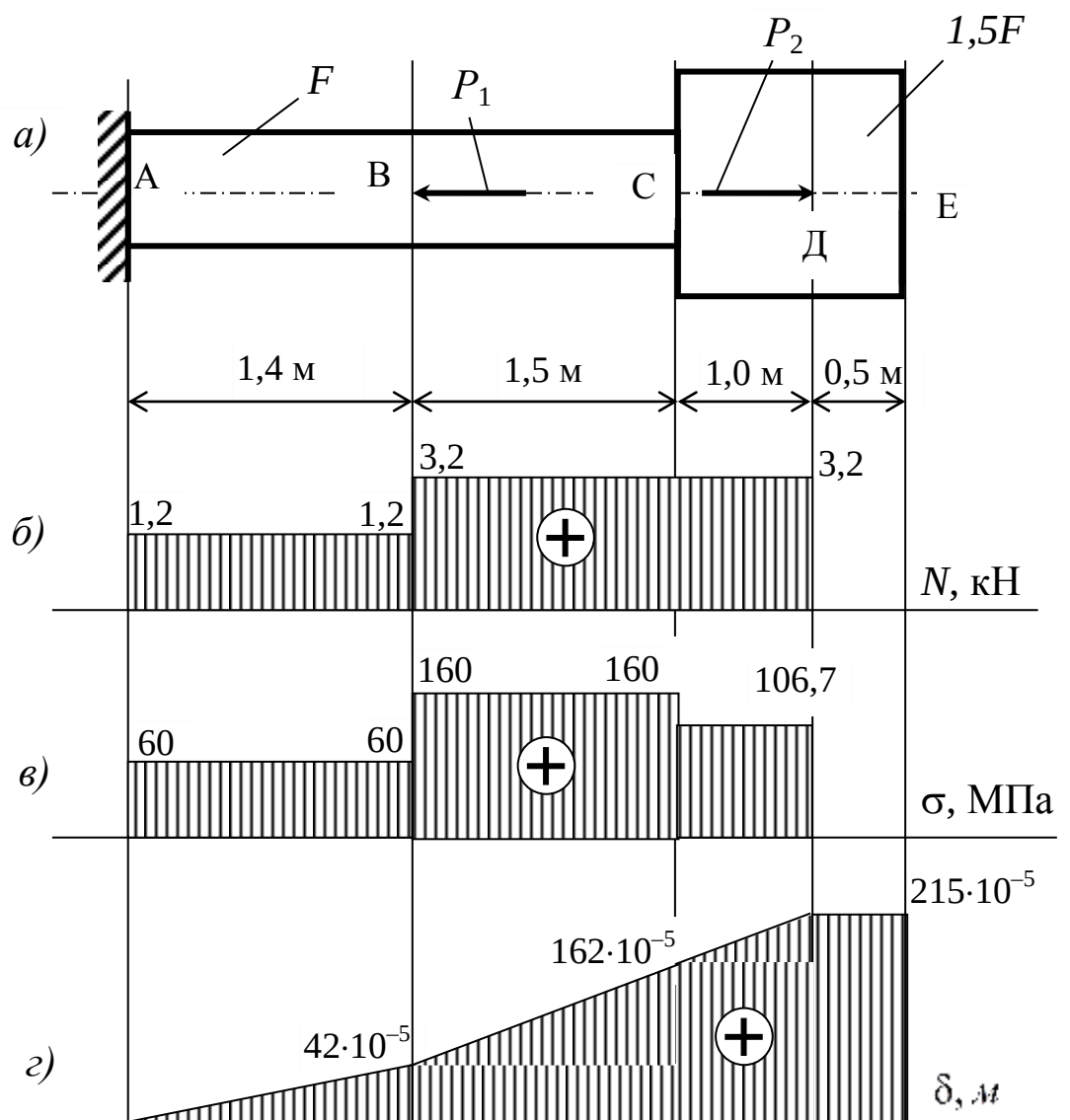


Рис. 2.3. Эпюры N , σ , δ

Построение эпюры δ .

Деформация i -го участка $\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{E_i F_i}$:

$$\Delta \ell_{AB} = \frac{N_{AB} \ell_{AB}}{EF} = \frac{1,2 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}} = 42 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta \ell_{BC} = \frac{N_{BC} \ell_{BC}}{EF} = \frac{3,2 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}} = 120 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta \ell_{CD} = \frac{N_{CD} \ell_{CD}}{E \cdot 1,5F} = \frac{1,2 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}} = 53 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta \ell_{DE} = 0.$$

Перемещения характерных сечений $\delta_{np} = \delta_{лев} + \Delta \ell_i$:

$$\delta_A = 0;$$

$$\delta_B = \delta_A + \Delta \ell_{AB} = 42 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta \ell_{BC} = 42 \cdot 10^{-5} + 120 \cdot 10^{-5} = 162 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta \ell_{CD} = 162 \cdot 10^{-5} + 53 \cdot 10^{-5} = 215 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_E = \delta_D + \Delta \ell_{DE} = 215 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Эпюра δ показана на рис. 2.3, г.

Длина всего стержня увеличится на

$$\Delta \ell_{сум} = 215 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 2,15 \text{ мм}.$$

2.1.5. Вопросы для самоконтроля

1. Какие внутренние усилия возникают при растяжении и сжатии и как они определяются?
2. Сформулируйте закон Гука.
3. Как вычисляются абсолютные и относительные продольные и поперечные деформации?
4. Сформулируйте понятие о модуле продольной упругости.
5. Что такое напряжение в сопротивлении материалов?
6. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях стержня при растяжении и сжатии?
7. Что такое допускаемое напряжение?
8. Запишите формулу нормальных напряжений при растяжении и сжатии.
9. Запишите условие прочности при растяжении и сжатии.
10. Какие задачи сопротивления материалов решаются с помощью условия прочности при растяжении и сжатии?

2.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ – СЖАТИИ

Статически неопределимой шарнирно – стержневой системой называется такая система, в которой усилия в стержнях нельзя определить только из уравнений равновесия.

Необходимые для решения задачи дополнительные уравнения можно составить, рассматривая систему в деформированном состоянии и устанавливая связи между перемещениями и деформациями элементов системы. Полученные уравнения называют уравнениями совместности деформаций.

Особенности статически неопределимых систем: определить внутренние усилия в статически неопределимых системах можно только задавшись соотношением жесткостей или площадей поперечных сечений ее элементов; в статически неопределимых системах могут возникать напряжения и при отсутствии внешних нагрузок (из-за неточности изготовления отдельных элементов, смещения опорных закреплений, а также от изменения температуры).

2.2.1. Расчет статически неопределимых систем

Расчет статически неопределимых систем начинают с установления степени статической неопределимости

$$K = m - n,$$

где m – число связей наложенных на систему; n – число возможных уравнений равновесия.

1. Статическая сторона задачи. Строится план сил для заданной системы. Будем считать все связи, наложенные на систему, кроме стержней, идеальными. Тогда направление их реакций принимаются произвольным. Реакции же стержней направляются в соответствии с их работой: растянутых стержней – от узлов, сжатых стержней – к узлам.

Составляются уравнения равновесия в соответствии с планом сил.

2. Геометрическая сторона задачи. Строится план перемещений. Он должен соответствовать плану сил – растягивающему

усилию на плане сил соответствует удлинение на плане перемещений, сжимающему усилию – укорочение. Составляются дополнительные уравнения совместности деформаций (УСД). Число УСД всегда равно степени статической неопределимости системы.

3. Физическая сторона задачи. Основным законом физики в сопротивлении материалов является закон Гука. С помощью второй формы закона Гука выражаем деформации через усилия

$$\Delta \ell_i^N = \frac{N_i \ell_i}{E_i F_i}. \quad (2.11)$$

Если, кроме того, задано изменение температуры системы на Δt° , то используется еще один физический закон – закон линейного температурного удлинения тел

$$\Delta \ell_i^t = \alpha_i \Delta t^\circ \ell_i, \quad (2.12)$$

где α – коэффициент линейного расширения; Δt° – изменение температуры.

4. Синтез. Производится совместное решение уравнений статики, геометрии, физики и определяются неизвестные усилия.

После раскрытия статической неопределимости (пункт 1–4) решается любая из основных задач сопротивления материалов исходя из условия прочности по допускаемым напряжениям.

2.2.2. Расчет по разрушающим нагрузкам (предельному состоянию)

Разрушающей (предельной) называется нагрузка, соответствующая полному исчерпанию несущей способности конструкции. В данном случае условие прочности выражает требование, чтобы наибольшая нагрузка на сооружение не превосходила допускаемой, которая определяется как разрушающая, деленная на коэффициент запаса прочности n . К расчету принимается наименьшая из разрушающих нагрузок, соответствующих возможным схемам разрушения

$$P_{\max} \leq P_{\text{доп}} = [P] = \frac{P_{\text{раз}}}{n}. \quad (2.13)$$

Для конструкций из пластичных материалов разрушающие усилия в элементе определяются по пределу текучести σ_T

$$N_{пр} = \sigma_T F. \quad (2.14)$$

Разрушающие усилия в элементе из хрупких материалов определяются по пределу прочности σ_B

$$N_{пр} = \sigma_B F. \quad (2.15)$$

Усилие $P_{раз}$ найдем, используя уравнение равновесия системы.

2.2.3. Пример расчета по допускаемым напряжениям

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирную неподвижную опору, как показано на рис. 2.4, прикреплен к двум стержням (м – медный, с – стальной) при помощи шарниров и нагружен равномерно распределенной нагрузкой q и силой P .

Требуется: определить усилия N_c , N_m , площади поперечного сечения F_c , F_m и напряжения σ_c , σ_m в стальном и медном стержнях от действия внешних нагрузок q и P ; если дано: $a = 2$ м; $c = 1,5$ м; $q = 10$ кН/м; $P = 20$ кН; $\frac{F_c}{F_m} = \frac{2}{3}$; $\ell_c = 1,5$ м; $\ell_m = 1,2$ м.

Принять:

для стали: $[\sigma]_c^+ = 160$ МПа, $[\sigma]_c^- = 120$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;

для меди: $[\sigma]_m^+ = 84$ МПа, $[\sigma]_m^- = 42$ МПа, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

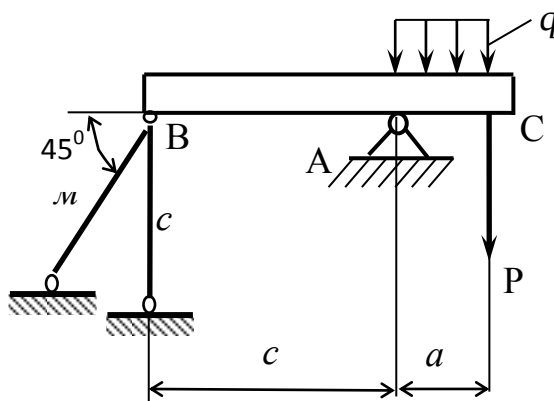


Рис. 2.4. Заданная система к примеру 2.2.3

Решение

Данная система является один раз статически неопредели-

мой шарнирно – стержневой системой ($K = m - n = 4 - 3 = 1$).

Раскрытие статической неопределенности производится в следующем порядке.

1. Статическая сторона задачи

Строим план сил (рис. 2.5) и составляем уравнение равновесия.

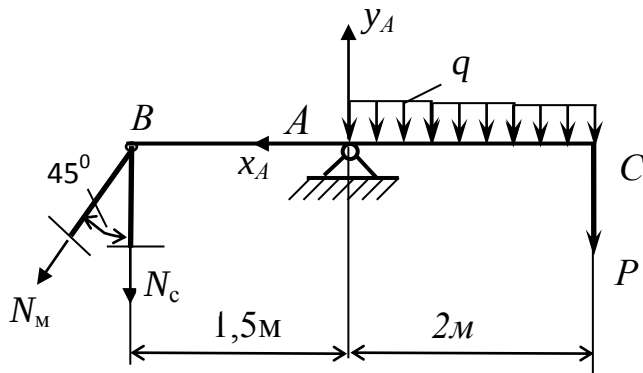


Рис. 2.5. План сил

$$\sum m_A = 0,$$

$$\sum m_A = N_C \cdot 1,5 + N_M \cdot \cos 45^\circ \cdot 1,5 - P \cdot 2 - q \frac{2^2}{2} = 0,$$

$$1,5 \cdot N_C + 0,707 \cdot 1,5 \cdot N_M - 20 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = 0,$$

$$1,5 \cdot N_C + 1,06 \cdot N_M = 60 \quad (1).$$

2. Геометрическая сторона задачи

Строим план перемещений (рис. 2.6) и составляем уравнение совместности деформаций.

Причем в виду малости деформаций точка B перемещается в положение B_1 по вертикали, а деформацию наклонного стержня получаем опуская перпендикуляр из точки B_1 (рис. 2.6).

Из треугольника BB_1B_2 имеем

$$\Delta \ell_c = \frac{\Delta \ell_m}{\cos 45^\circ}.$$

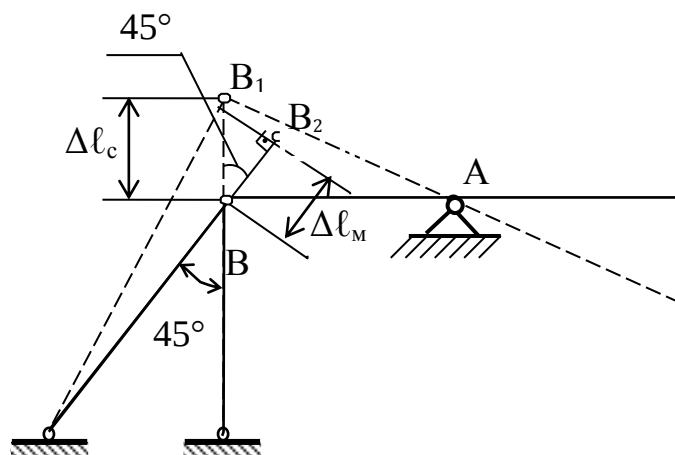


Рис. 2.6. План перемещений

3. Физическая сторона задачи

При помощи закона Гука

$$\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{E_i F_i}$$

выражаем деформации через усилия, действующие в стержнях:

$$\frac{N_c \ell_c}{E_c F_c} = \frac{N_m \ell_m}{E_m F_m \cos 45^\circ},$$

с учетом, что $\frac{F_c}{F_m} = \frac{2}{3}$, получим

$$\frac{N_c \cdot 1,5 \cdot 3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 F_m} = \frac{N_m \cdot 1,2}{1 \cdot 10^5 \cdot F_m \cdot 0,707},$$

или

$$N_c = 1,51 N_m. \quad (2)$$

4. Синтез

Совместно решаем уравнения статической (1) и физической (2) сторон задачи.

Подставив уравнение (1) в уравнение (2) получим

$$1,5 \cdot 1,51 N_m + 1,06 N_m = 60;$$

$$N_m = 18,05 \text{ кН}.$$

Следовательно,

$$N_c = 1,51N_m = 1,51 \cdot 18,05 = 27,25 \text{ кН}.$$

5. Подбор поперечных сечений стержней

Подбор поперечных сечений стержней производится по условию прочности при растяжении или сжатии:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

а) Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения стального стержня равна

$$F_c \geq \frac{N_c}{[\sigma]_c^+} \geq \frac{27,25}{160 \cdot 10^3} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Площадь медного стержня по заданному отношению площадей равна

$$F_m = \frac{3F_c}{2} = \frac{3 \cdot 0,17 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,255 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

б) Требуемая из условия прочности площадь поперечного сечения медного стержня равна

$$F_m \geq \frac{N_m}{[\sigma]_m^+} \geq \frac{18,05}{84 \cdot 10^3} = 0,215 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Площадь стального стержня по заданному отношению площадей равна

$$F_c = \frac{2F_m}{3} = \frac{2 \cdot 0,215 \cdot 10^{-3}}{3} = 0,141 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Принимаем большие площади поперечных сечений стержней:

$$F_c = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad F_m = 0,255 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

6. Напряжения в стержнях от внешних сил

$$\sigma_c = \frac{N_c}{F_c} = \frac{27,25 \cdot 10^{-3}}{0,17 \cdot 10^{-3}} = 160 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{F_m} = \frac{18,05 \cdot 10^{-3}}{0,255 \cdot 10^{-3}} = 70,78 \text{ МПа} .$$

2.2.4. Пример расчета по разрушающим нагрузкам

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирную неподвижную опору, как показано на рис. 3.1, прикреплен к двум стержням (м – медный, с – стальной) при помощи шарниров и нагружен равномерно распределенной нагрузкой q и силой P .

Требуется: 1) определить F_c и F_m методом расчета по разрушающей нагрузке; 2) сравнить величины F_c , F_m , полученные при расчете по допускаемым напряжениям и разрушающей нагрузке.

Решение

Для системы, (рис. 3.1) опасным состоянием считается её предельное состояние, при котором полностью исчерпывается грузоподъемность системы. В этот момент усилия в стержнях должны достигнуть предельного значения:

$$N_{npi} = \sigma_{Ti} F_i ,$$

где σ_{Ti} - предел текучести i -го стержня.

Построим план сил для рассматриваемой системы в предельном состоянии (рис. 3.4).

Составим уравнение статики:

$$\sum m_A = 0 ,$$

$$\sigma_{Tc} F_c \cdot 1,5 + \sigma_{Tm} F_m \cdot 1,5 \cdot \sin 45^\circ - P_{пред} \cdot 2 - q_{пред} \frac{2^2}{2} = 0 .$$

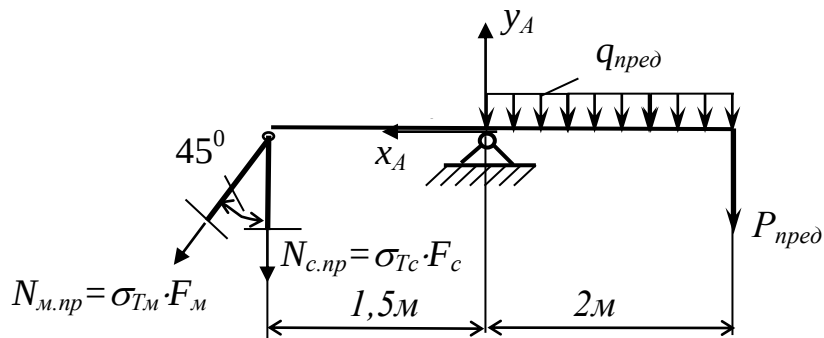


Рис. 2.7. План сил в предельном состоянии

Подставив $F_M = 1,5F_c$ и сократив уравнение на 2, получим:

$$\sigma_{Tc} \cdot 0,75F_c + \sigma_{TM} \cdot 0,795F_c - P_{пред} - q_{пред} = 0.$$

Введем единый коэффициент запаса прочности n :

$$\frac{\sigma_{Tc} \cdot 0,75F_c}{n} + \frac{\sigma_{TM} \cdot 0,795F_c}{n} - \frac{P_{пред}}{n} - \frac{q_{пред}}{n} = 0,$$

$$[\sigma]_c^+ \cdot 0,75F_c + [\sigma]_m^+ \cdot 0,795F_c - P_{дон} - q_{дон} = 0,$$

$$160 \cdot 10^3 \cdot 0,75F_c + 84 \cdot 10^3 \cdot 0,795F_c - 20 - 10 = 0,$$

$$186,78 \cdot 10^3 F_c = 30,$$

$$F_c = \frac{30}{186,78 \cdot 10^3} = 0,161 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$F_M = 1,5 \cdot 0,161 \cdot 10^{-3} = 0,241 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Площади поперечных сечений, полученные при расчете по предельному состоянию, меньше, чем при расчете по допускаемым напряжениям. Таким образом метод расчета по предельному состоянию позволяет вскрыть резервы прочности пластичных материалов. Конструкция получается легче и экономичнее.

2.2.5. Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы являются статически неопределимыми?
2. Что такое степень статической неопределимости?
3. Какие связи называются «лишними»?
4. Запишите алгоритм раскрытия статической неопределимости?

5. Что представляют собой дополнительные уравнения?
6. Чему равно число дополнительных уравнений?
7. Какое состояние системы считается опасным?
8. Какая нагрузка является допускаемой, предельной и предельно допускаемой?

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Прочность, жёсткость и устойчивость элементов конструкций во многом определяются формой и размерами их поперечных сечений. В расчётной практике используют так называемые геометрические характеристики сечений.

Площадь сечения является одной из геометрических характеристик, используемой, главным образом, в расчётах на растяжение и сжатие. При расчётах на кручение, изгиб, а также на устойчивость используют более сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления.

При изложении вопросов геометрических характеристик будем использовать систему координат, показанную на рис. 2.8.

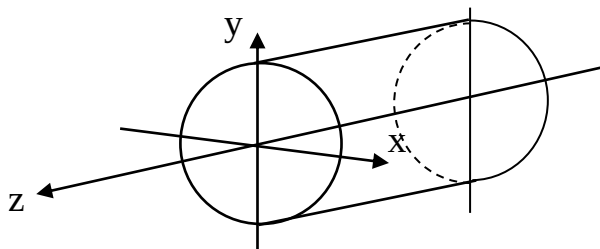


Рис. 2.8. Система координат

Геометрическими характеристиками данного сечения являются: площадь F , статические моменты S_x , S_y , моменты инерции I_x , I_y , I_ρ , I_{xy} , моменты сопротивления W_x , W_y , W_ρ , радиусы инерции i_x , i_y , i_ρ .

2.3.1. Площадь плоских сечений (фигур)

Площадь произвольной фигуры определяется выражением (рис. 2.17)

$$F = \int_F dF. \quad (2.16)$$

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений они разбиваются на конечное число n простых частей. В этом случае

$$F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (2.17)$$

2.3.2. Статические моменты площади сечения.

Центр тяжести сечения

Статическими моментами площади сечения, относительно осей x и y , лежащих в плоскости этой фигуры (рис. 2.9), называются геометрические характеристики, определяемые формулами

$$S_x = \int_F y dF, \quad (2.18)$$

$$S_y = \int_F x dF. \quad (2.19)$$

Если известны координаты центра тяжести сечения x_c и y_c (рис. 2.9) и его площадь F , то статические моменты определяют по формулам

$$S_y = F x_c, \quad (2.20)$$

$$S_x = F y_c. \quad (2.21)$$

Известно, что статический момент площади плоской фигуры (сечения) относительно любой центральной оси равен нулю. Обратное положение также справедливо: если статический момент сечения относительно какой-либо оси равен нулю, то эта ось является центральной, т. е. проходит через центр тяжести сечения C .

В зависимости от положения сечения относительно осей координат статический момент может быть положительным или отрицательным.

Из (2.20) и (2.21) могут быть определены координаты центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad (2.22)$$

$$y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (2.23)$$

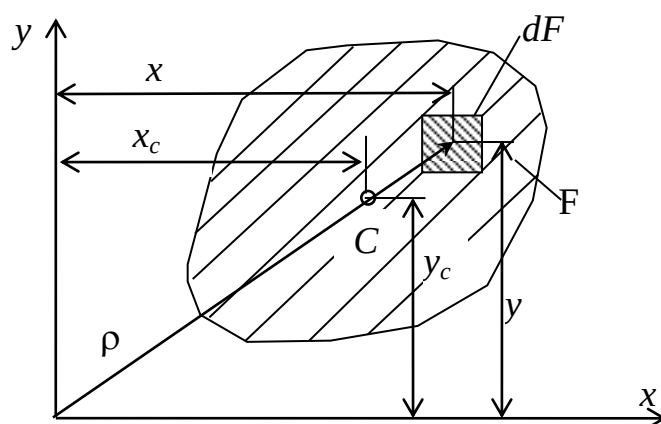


Рис. 2.9. Положение центра тяжести фигуры

Для вычисления статических моментов сложной фигуры её разбивают на простые части, для каждой из которых известна площадь F_i и координаты центра тяжести x_i, y_i . Статические моменты всей фигуры относительно осей x и y определяют по формулам:

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i, \quad (2.24)$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i. \quad (2.25)$$

Координаты центра тяжести сложной фигуры определяют:

$$x_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad (2.26)$$

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}. \quad (2.27)$$

2.3.3. Моменты инерции сечений

Осевые моменты инерции площади поперечного сечения бруса относительно осей x и y (рис. 2.9):

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad (2.28)$$

$$I_y = \int_F x^2 dF. \quad (2.29)$$

Полярный момент инерции относительно начала координат (полюса) (рис. 2.9) равен

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.30)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей x, y , то $\rho^2 = x^2 + y^2$ (рис. 2.9), и следовательно,

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (2.31)$$

Центробежный момент инерции площади поперечного сечения относительно осей x и y (рис. 2.9) равен

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.32)$$

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, а центробежный в зависимости от положения сечения относительно осей координат может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Центробежный момент инерции фигуры относительно осей, включающих хотя бы одну ось симметрии, равен нулю.

В самом общем случае переход от любой старой к любой новой системе координат может рассматриваться как два последовательных преобразования старой системы координат:

1) путём параллельного переноса осей координат x, y в новое положение x', y' :

$$I_{x'} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad (2.33)$$

$$I_{y'} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + b_i^2 F_i), \quad (2.34)$$

$$I_{x'y'} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + a_i b_i F_i), \quad (2.35)$$

где I_{xi} , I_{yi} , $I_{x_i y_i}$ – моменты инерции относительно центральных осей каждой из простых фигур F_i ; I_x , I_y , $I_{x'y'}$ – моменты инерции относительно новых осей; a_i , b_i – соответственно расстояния от старых осей x и y до параллельных им новых осей x' и y' , которые в формулы (2.33), (2.34) и (2.35) входят со своими знаками;

2) путём поворота осей на угол α относительно начала координат:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \quad (2.36)$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \quad (2.37)$$

$$I_{x'y'} = 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (2.38)$$

2.3.4. Положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции

Угол поворота одной из главных осей относительно оси x можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (2.39)$$

Положительный угол α_0 откладывается против часовой стрелки, а отрицательный – по ходу.

Значения главных моментов инерции I_u , I_v можно найти по формуле

$$I_{u,v} = I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}. \quad (2.40)$$

Ось максимумов всегда составляет меньший угол с той из осей (x или y), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение.

2.3.5. Последовательность (алгоритм) определения положения главных центральных осей инерции и величин главных центральных моментов инерции

1. В произвольной системе координат по формулам (2.26) и (2.27) определяем положение центра тяжести для составных (сложных) сечений, разбивая их на простые.

2. Через центр тяжести сечения проводим центральные оси x_c и y_c , параллельные осям систем координат составных фигур.

3. По формулам (2.33), (2.34) и (2.35) определяем осевые и центробежные моменты относительно центральных осей x_c и y_c .

4. По формуле (2.39) определяем угол α_0 , характеризующий положение главных центральных осей инерции, и по формуле (2.40) величину главных моментов инерции.

5. После вычисления величин I_u и I_v рекомендуется проверить соблюдение равенства:

$$I_u + I_v = I_{x_c} + I_{y_c}, \quad (2.41)$$

а также равенство нулю центробежного момента инерции относительно главных осей I_{uv} по формуле (2.38).

2.3.6. Пример

Найти положение главных центральных осей инерции и значение главных моментов инерции для сечения состоящего из равнобокого уголка и двутавра (рис. 2.10). Начертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нём все размеры в числах и все оси, если дано: уголок 90×7, двутавр №22.

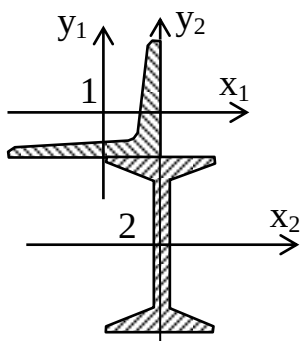


Рис. 2.10. Схема поперечного сечения

Решение

Из сортамента выбираем необходимые данные.

Для уголка равнобокого 90×7 по ГОСТ 8509-89 $b = 90$ мм, $d = 7$ мм, $z_0 = 2,47$ см, $F_1 = 12,28$ см², $I_{x1} = I_{y1} = 94,3$ см⁴, $I_{\max} = 150$ см⁴, $I_{\min} = 38,9$ см⁴.

Для двутавра по ГОСТ 8239-89 $h = 220$ мм, $b = 110$ мм, $d = 5,7$ мм, $F_2 = 30,6$ см², $I_{x2} = 2550$ см⁴, $I_{y2} = 157$ см⁴.

1. Проводим вспомогательную систему осей координат (x , y). Начало координат, для сокращения объема вычислений, целесообразно расположить в центре тяжести какой-либо из фигур, например двутавра. Определяем координаты центра тяжести C всей фигуры в системе осей x и y :

$$x_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{-2,47 \cdot 12,28}{12,28 + 30,6} = -0,707 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{13,47 \cdot 12,28}{12,28 + 30,6} = 3,86 \text{ см},$$

$$y_1 = \frac{h}{2} + z_0 = \frac{22}{2} + 2,47 = 13,47 \text{ см},$$

где

$$y_2 = 0,$$

$$x_1 = -z_0 = -2,47 \text{ см}, \quad x_2 = 0.$$

Через центр тяжести C (рис. 2.12) проводим центральные оси x_c и y_c параллельно проведенным ранее собственным осям уголка и двутавра (x_1, y_1, x_2, y_2).

В системе координат центральных осей x_c и y_c координаты центров тяжести уголка и двутавра определяем из выражений

$$a_i = y_i - y_c, \quad b_i = x_i - x_c.$$

Данные сводим в таблицу

Точка	x_i , см	y_i , см	a_i , см	b_i , см
O_1	-2,47	13,47	9,61	-1,76
O_2	0	0	-3,86	0,707

2. Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей x_c, y_c :

$$I_{x_c} = \sum (I_{x_i} + a_i^2 F_i) = I_{x_1} + a_1^2 F_1 + I_{x_2} + a_2^2 F_2 = \\ = 94,3 + 9,61^2 \cdot 12,28 + 2550 + (-3,86)^2 \cdot 30,6 = 4234 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + b_i^2 F_i) = I_{y_1} + b_1^2 F_1 + I_{y_2} + b_2^2 F_2 = \\ = 94,3 + (-1,76)^2 \cdot 12,28 + 157 + 0,707^2 \cdot 30,6 = 294,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_c y_c} = \sum (I_{x_i y_i} + a_i b_i F_i) = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2 = \\ = 55,5 + 9,61 \cdot (-1,76) \cdot 1228 + 0 + (-3,86) \cdot 0,707 \cdot 30,6 = -236 \text{ см}^4.$$

Для равнобокого уголка

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = \frac{150 - 38,9}{2} = 55,5 \text{ см}^4.$$

Для двутавра $I_{x_2 y_2} = 0$.

Знак центробежного момента инерции уголка определяем по правилам изображенным на рис. 2.11.

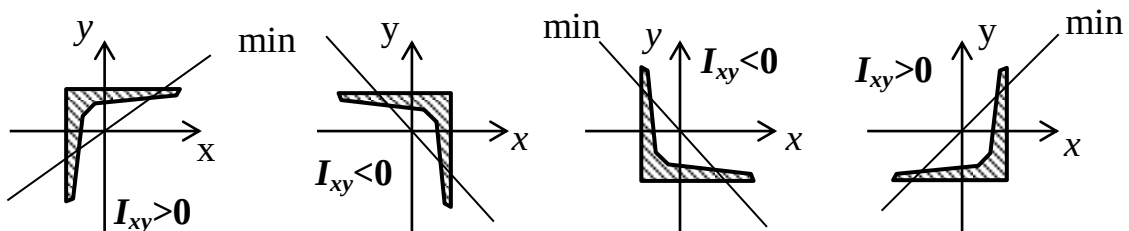


Рис. 2.11. Правило знаков центробежного момента

3. Находим угол поворота главных центральных осей u и v относительно центральных осей x_c и y_c :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{2(-236)}{4234 - 294,6} = 0,12;$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0,12;$$

$$2\alpha_0 = 6^\circ 50';$$

$$\alpha_0 = 3^\circ 25'.$$

Поскольку угол α_0 положительный, то главная центральная ось u повернута относительно оси x_c против часовой стрелки, а так как $I_{x_c} > I_{y_c}$, то эта ось является осью u (max), относительно которой момент инерции будет максимальным.

4. Вычисляем главные моменты инерции

$$I_{\max, \min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2},$$

$$I_{\max} = I_u = \frac{4234 + 294,6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(4234 - 294,6)^2 + 4(-236)^2} =$$

$$= 4248 \text{ см}^4,$$

$$I_{\min} = I_v = \frac{4234 + 294,6}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(4234 - 294,6)^2 + 4(-236)^2} =$$

$$= 280,6 \text{ см}^4.$$

5. Выполняем упомянутые выше проверки

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_u + I_v;$$

$$I_{uv} = 0,5(I_{x_c} - I_{y_c}) \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= 0,5(4234 - 294,6) \sin(6^\circ 50') - 236 \cos(6^\circ 50') =$$

$$= 234 - 234 = 0.$$

2.3.7. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется статическим моментом сечения?
2. Что такое осевой, полярный и центробежный моменты инерции сечения?
3. Какова размерность статического момента сечения?
4. Какую размерность имеют моменты инерции?
5. Как определяются координаты центра тяжести простого и сложного сечений?
6. Как меняется знак центробежного момента инерции при изменении положения сечения в правой декартовой системе координат?
7. Напишите зависимости между осевыми и центробежными моментами инерции сечения для параллельных осей?

8. Какие оси называются главными центральными осями инерции?

9. Что такое главные центральные моменты инерции?

10. Напишите выражения для определения положения главных осей инерции и величин главных моментов инерции?

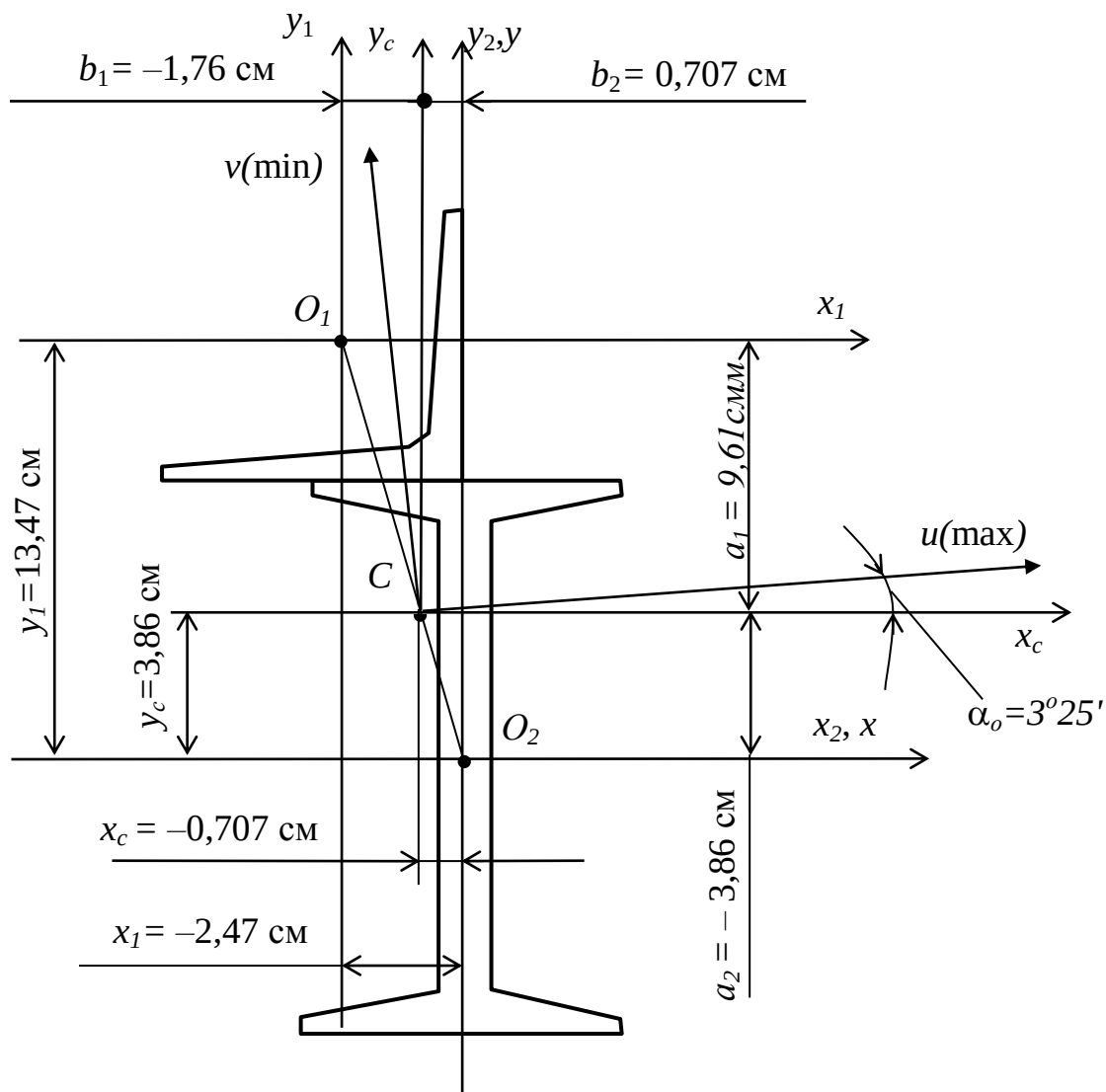


Рис. 2.12. Определение положения главных центральных осей инерции

2.4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОГО БРУСА НА КРУЧЕНИЕ

2.4.1. Определение внутренних усилий при кручении

Кручением называется вид деформирования брусьев, вызываемый внешними (закручивающими) моментами, действующими перпендикулярно продольной оси бруса. При кручении брусьев возникает внутреннее усилие – крутящий момент $M_{кр}$, вызывающий появление касательных напряжений τ . Касательные напряжения по сечению бруса распределяются неравномерно: максимальные и минимальные – на внешнем контуре сечения, равные нулю – в его центре (рис. 2.13).

В основу расчетов на кручение положены следующие допущения:

- 1) сечения бруса плоские до закручивания, остаются плоскими в процессе закручивания;
- 2) радиусы сечений бруса в ходе закручивания остаются прямолинейными.

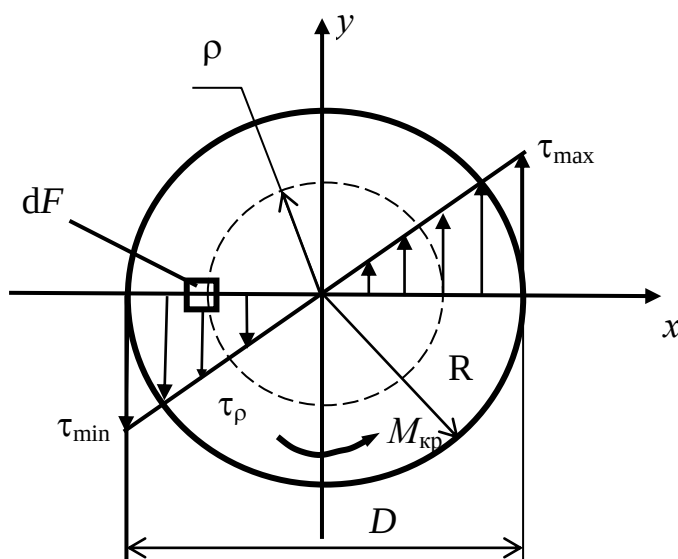


Рис. 2.13. Распределение касательных напряжений по сечению бруса при кручении

На основе принятых гипотез получены все рабочие формулы названной темы.

Крутящий момент $M_{кр}$, действующий в сечении, считается положительным, если при взгляде на сечение бруса со стороны начала координат он будет виден направленным против хода часовой стрелки (рис. 2.14).

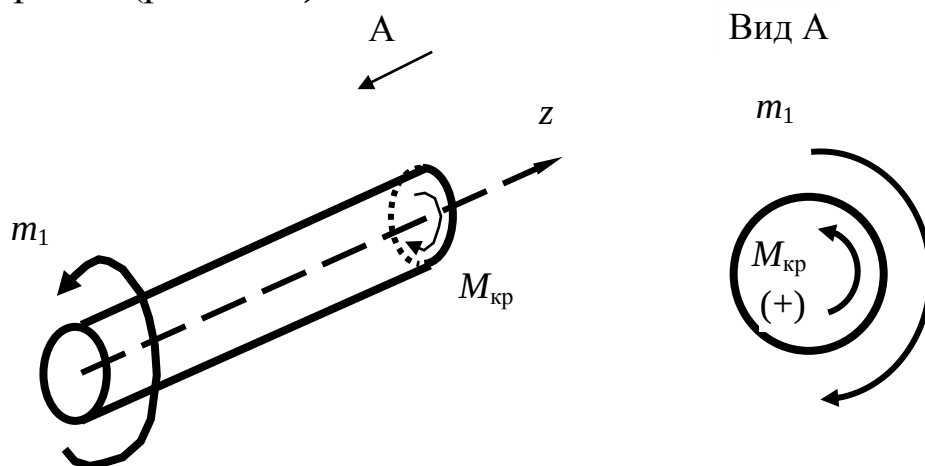


Рис. 2.14. Правило знаков для крутящих моментов

Определение внутренних усилий (крутящих моментов) при кручении обычно производится методом сечений: составляются уравнения крутящих моментов для отдельных участков вала и с их помощью находятся значения крутящих моментов в характерных сечениях с дальнейшим построением эпюры.

2.4.2. Определение напряжений при кручении и условие прочности

Как было сказано ранее (см. рис. 2.13), касательные напряжения при кручении распределяются по сечению неравномерно и могут быть найдены по формуле

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_\rho} \rho, \quad (2.42)$$

где ρ – переменный радиус сечения, может изменяться от минимального до максимального значений, то есть от 0 до $R = D/2$.

Максимальные напряжения на внешнем контуре сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} R = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \frac{D}{2} = \frac{M_{кр}}{\left(\frac{I_{\rho}}{D/2} \right)}. \quad (2.43)$$

С целью упрощения полученной формулы вводится величина, имеющая название полярного момента сопротивления:

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{D/2}. \quad (2.44)$$

Полярный момент инерции сплошного круглого сечения определяется по формуле

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad (2.45)$$

В случае кольцеобразного сечения:

$$I_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.46)$$

где D и d – внешний и внутренний диаметры кольцеобразного сечения; α – соотношение между диаметрами сечения (обычно при подборе сечения принимается равным $0,7 \div 0,8$).

$$\alpha = \frac{d}{D}. \quad (2.47)$$

Тогда полярный момент сопротивления круглого сечения будет равен:

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4 / 32}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}, \quad (2.48)$$

для кольцеобразного сечения:

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{D/2} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4 (1 - \alpha^4)}{32}}{D/2} = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16}. \quad (2.49)$$

Формула для определения максимальных касательных напряжений при кручении принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}. \quad (2.50)$$

Одной из основных целей расчета на прочность является подбор сечения бруса, способного выдерживать внешнюю нагрузку, не разрушаясь.

На основе полученного выражения (2.50) условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (2.51)$$

где $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения, которые задаются из справочника по сопротивлению материалов в соответствии с нормами; для пластичных сталей $[\tau]$ могут быть приняты равными $[\sigma] / 2$, а для хрупких – $[\sigma]^+$.

Подбор сечения производится по следующему алгоритму, вытекающему из формулы (2.51).

1. По максимальному крутящему моменту, взятому с эпюры крутящих моментов, определяется полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} \geq \frac{|M_{кр}|}{[\tau]}, \quad (2.52)$$

2. Из формул для момента сопротивления (2.48) и формулы (2.52) определяется диаметр сплошного круглого сечения

$$W_{\rho} \geq \frac{|M_{кр}|}{[\tau]}, \quad (2.53)$$

откуда

$$D = 3 \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}}. \quad (2.54)$$

Для кольцевого сечения внешний и внутренний диаметры с помощью выражений (2.49) и (2.53) определяются:

$$D = 3 \sqrt[3]{\frac{M_{кр} \cdot 16}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}, \quad (2.55)$$

$$d = \alpha D.$$

2.4.3. Определение перемещений при кручении и расчет на жесткость

Кроме расчетов брусьев на прочность еще производятся их расчеты на жесткость и очень часто эти расчеты оказываются определяющими.

Существует два типа критерия жесткости стержней при кручении в зависимости от вида бруса и характера его работы. Этими критериями являются: достижение углом закручивания или относительным углом закручивания допускаемых величин.

Расчет бруса на жесткость (рис. 2.15) при кручении с помощью абсолютного угла закручивания производится по формуле, подобной условию жесткости при растяжении–сжатии:

$$\varphi = \sum \Delta\varphi_i = \sum \frac{M_{кр\,i} \ell_i}{G I_{\rho i}} \leq [\varphi], \quad (2.56)$$

где φ – угол закручивания рассматриваемого сечения бруса; $\Delta\varphi_i$ – приращение угла закручивания на i -м участке бруса; ℓ_i – длина i -го участка бруса; G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала бруса; $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания.

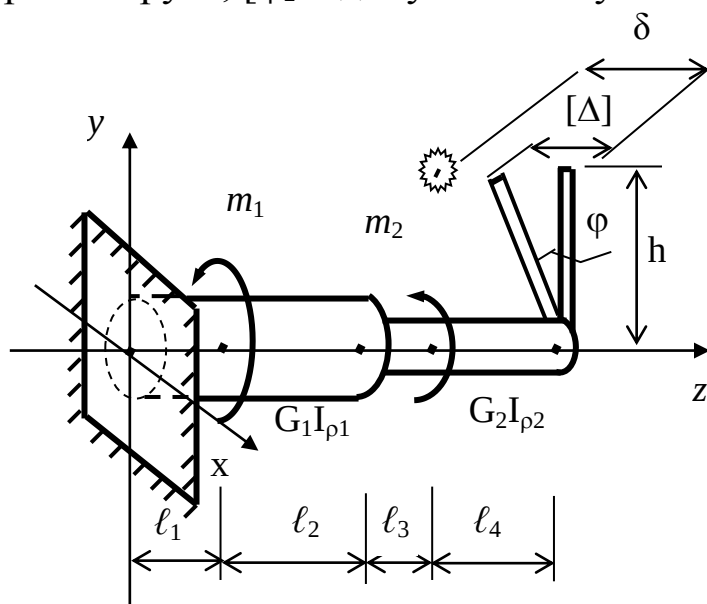


Рис. 2.15. Схема работы консольного бруса с кронштейном

Рекомендуется проводить оценку жесткости брусьев не только по величинам углов закручивания, но и по их относительным значениям.

Относительный угол закручивания при однородном кручении равен

$$\Theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{M_{кр}}{G I_{\rho}}. \quad (2.57)$$

Тогда условие жесткости бруса имеет вид

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G I_{\rho}} \leq [\Theta], \quad (2.58)$$

где $[\Theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания. Он является эмпирической величиной, приводится в нормативных источниках и зависит только от характера нагружения бруса. Максимальное значение для типичных условий $[\Theta] = 2 \text{ град/м} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$.

2.4.4. Пример расчета бруса с постоянным поперечным сечением

Дано.

Брус постоянного поперечного сечения жестко закреплен на левом конце (рис. 2.16, а). Брус нагружен внешними закручивающими моментами m_1, m_2, m_3 .

Брус выполнен из стали ВСт3сп5.

Характеристики стали $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Задание.

Подобрать сечение бруса из условия прочности и жесткости.

Решение:

1. Расчет на прочность.

1) Определим внутренние усилия в сечениях бруса и построим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.

Произведем построение эпюры крутящих моментов по методу сечений с использованием упрощенного правила: на эпюре $M_{кр}$, в местах действия закручивающих моментов, образуются скачки в направлении их действия, указанные стрелками, величина скачка равна величине момента (см. рис. 2.16, б).

2) Подберем сечение бруса.

Произведем подбор диаметра D при помощи выражения (2.52):

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр} 16}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,172 \text{ м},$$

Согласно ГОСТ 6639–69 примем диаметр $D = 0,18 \text{ м}$.

3) Построим эпюру касательных напряжений τ в соответствии с подобранными диаметрами.

Для построения эпюры τ необходимо знание значений полярных моментов сопротивления.

По формуле (2.48) определим моменты сопротивления сечения бруса:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,18^3}{16} = 0,00115 \text{ м}^3.$$

Определим максимальные касательные напряжения на поверхности каждого участка бруса:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{кр}^{AB}}{W_p^{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,00115} = 34,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC}}{W_p^{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3}{0,00115} = -43,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -43,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD}}{W_p^{CD}} = \frac{80 \cdot 10^3}{0,00115} = 69,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 69,6 \text{ МПа};$$

По полученным значениям моментов строится эпюра касательных напряжений τ (рис. 2.16, в).

4) Проверим брус на прочность.

На эпюре касательных напряжений находим максимальное по модулю значение этих напряжений. Наибольшие напряжения имеют место на участке CD бруса, сравним их с допускаемыми напряжениями.

$$\tau_{\max} = \tau_{CD} = 69,6 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Вывод: условие прочности удовлетворяется.

2. Расчет на жесткость.

1) Определим приращения углов закручивания на участках бруса.

Определим углы закручивания каждого характерного сечения на участках $\Delta\varphi$ ступенчатого бруса в отдельности. Для этого по формуле (4) определим полярные моменты инерции сечений каждого участка:

$$I_{\rho}^{AB} = I_{\rho}^{BC} = I_{\rho}^{CD} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,18^4}{32} = 103 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Определяем приращения углов закручивания на каждом участке бруса:

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{M_{кр}^{AB} \ell_1}{G I_{\rho}^{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = 0,00146 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC} \ell_2}{G I_{\rho}^{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = -0,00364 \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD} \ell_3}{G I_{\rho}^{CD}} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 103 \cdot 10^{-6}} = 0,00777 \text{ рад}.$$

Полученные значения $\Delta\varphi$ используем для построения эпюры углов закручивания φ (угловых перемещений).

2) Построим эпюры углов закручивания.

Неподвижным сечением, угол закручивания которого равен нулю, является сечение в начале координат.

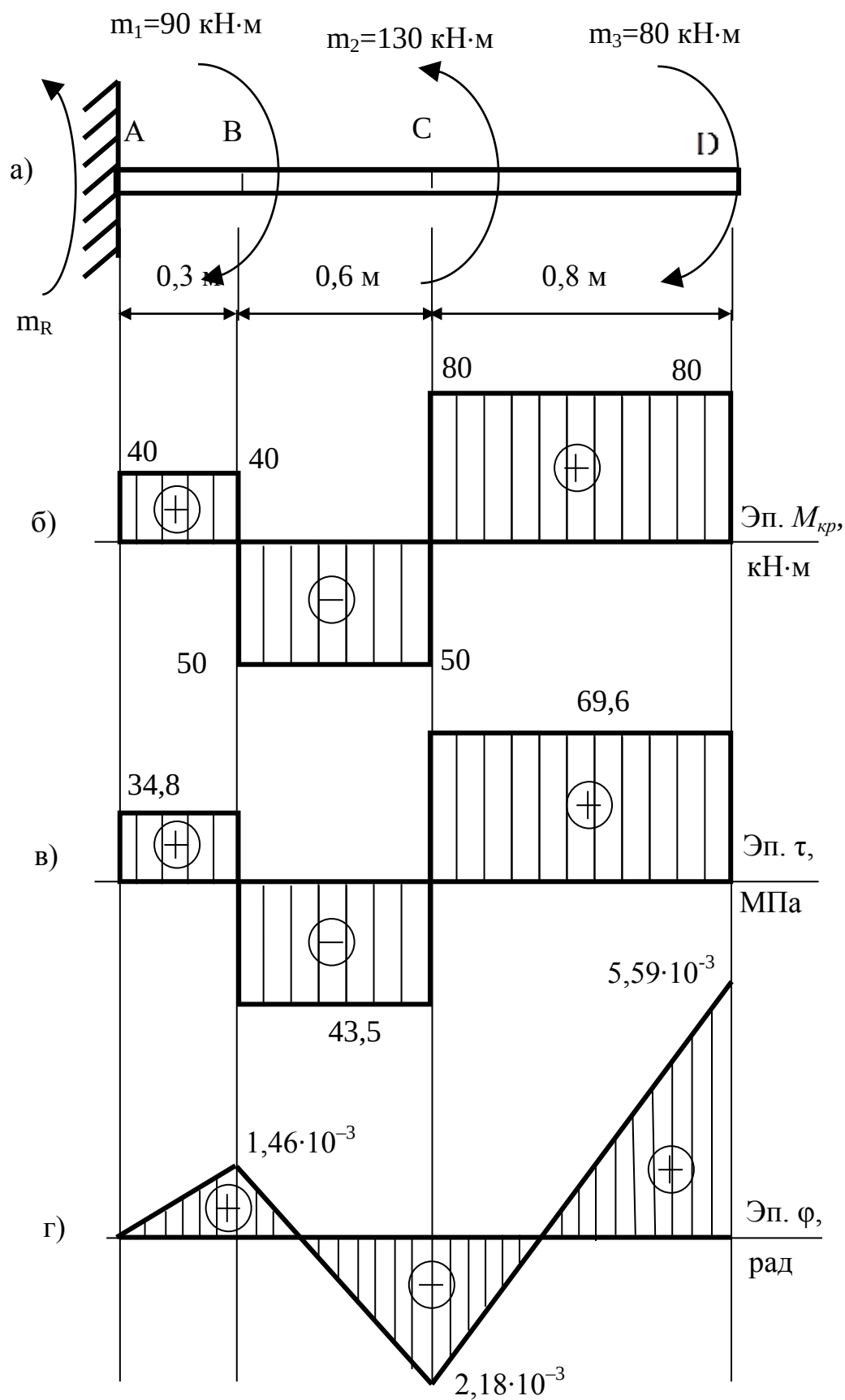


Рис. 2.16. Расчетная схема (а) и эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ (б), касательных напряжений τ (в) и углов закручивания ϕ (г)

Углы закручивания характерных сечений определим суммированием с учетом знаков значений $\Delta\varphi_i$ на всех участках между характерными сечениями и началом координат.

Значения углов закручивания в характерных сечениях равны:

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi_{AB} = 0 + 0,00146 = 0,00146 \text{ рад} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = 0,00146 - 0,00364 = -0,00218 \text{ рад} = -2,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \Delta\varphi_{CD} = -0,00218 + 0,00777 = 0,00559 \text{ рад} = 5,59 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания φ (см. рис. 2.16, г).

3) Подберем сечения бруса из условия жесткости.

Условие жесткости при кручении выглядит:

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G I_\rho} \leq [\Theta], \quad (2.59)$$

где $[\Theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания. Он является эмпирической величиной, приводится в нормативных источниках и зависит только от характера нагружения вала. Максимальное значение для типичных условий $[\Theta] = 2 \text{ град/м} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$.

Из выражения (2.59) выразим диаметр бруса:

$$D = \sqrt[4]{\frac{M_{кр} \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 34 \cdot 10^{-3}}} = 0,132 \text{ м}.$$

Согласно ГОСТ 6636–69 принимаем $D = 0,14 \text{ м}$.

По условию прочности требуется диаметр $D = 0,18 \text{ м}$. Для того, чтобы удовлетворялось условие прочности и условие жесткости, окончательно примем диаметр $D = 0,18 \text{ м}$.

2.4.5. Вопросы для самоконтроля

1. Какие существуют правила знаков для крутящего момента?
2. В каких сечениях бруса крутящий момент меняется скачкообразно?
3. Какие допущения принимаются при кручении?
4. Как направлены и как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении при кручении?
5. Как связаны касательные напряжения и крутящий момент?
6. Что такое полярный момент инерции сечения бруса? Как он используется в расчете на кручение?
7. Что такое момент сопротивления кручению? Как он используется в расчете на кручение?
8. Как определяются касательные напряжения в сечении?
9. Как выглядит условие прочности при кручении?
10. Что такое угол закручивания и относительный угол закручивания бруса? В чем их отличие?
11. Как выглядит условие жесткости при кручении?
12. Какие существуют алгоритмы расчета бруса на прочность и жесткость при кручении?

2.4.6. Задания для самостоятельного решения

Выберите, в соответствии с вашим вариантом задачи для самостоятельной работы из таблицы 2, из таблицы 1 возьмите числовые значения.

Общие данные возьмите из «Дано» примера,

1. Задайте площади сечений ступеней бруса в соответствии с пропорциями между ступенями брусьев.
2. Поставьте в опасной точке бруса деталь механизма, при соприкосновении с которой брус выведет ее из строя.
3. Рассчитайте брус на прочность и жесткость в соответствии с примером.

Таблица 1

№	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	m_3 , кН·м	a , м	b , м	c , м
1	30	60	40	0,5	0,3	0,9
2	50	80	80	0,6	0,8	0,5
3	70	90	90	0,7	0,5	0,6
4	80	70	30	0,8	0,2	0,4
5	90	40	40	0,9	0,5	0,8
6	40	50	50	0,4	0,6	0,6
7	60	30	60	0,3	0,7	0,7
8	80	90	70	0,5	0,9	0,6
9	90	80	20	0,6	0,8	0,4
0	70	60	90	0,8	0,5	0,3

Таблица 2

	А	В	С
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

2.5. ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

2.5.1. Общие понятия о деформации изгиба

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты, т. е. моменты внутренних сил, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости поперечного сечения стержня.

Изгиб называется чистым, если изгибающий момент является единственным внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня.

В случае, когда в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом возникает поперечная сила, изгиб называется поперечным.

Если плоскость действия сил (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения стержня, изгиб называется прямым или простым.

2.5.2. Определение внутренних усилий при прямом изгибе

На основании метода сечений формулируются следующие правила:

а) поперечная сила Q в любом произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения на ось y поперечного сечения

$$Q = \sum_{лев.} P_{Yi} = \sum_{пр.} P_{Yi}, \quad (2.60)$$

б) изгибающий момент в любом произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно оси x поперечного сечения

$$M = \sum_{лев} m_x(p_i) = \sum_{пр} m_x(p_i). \quad (2.61)$$

2.5.3. Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечная сила считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз (рис. 2.17, а), и отрицательной – в противоположном случае (рис. 2.17, б).

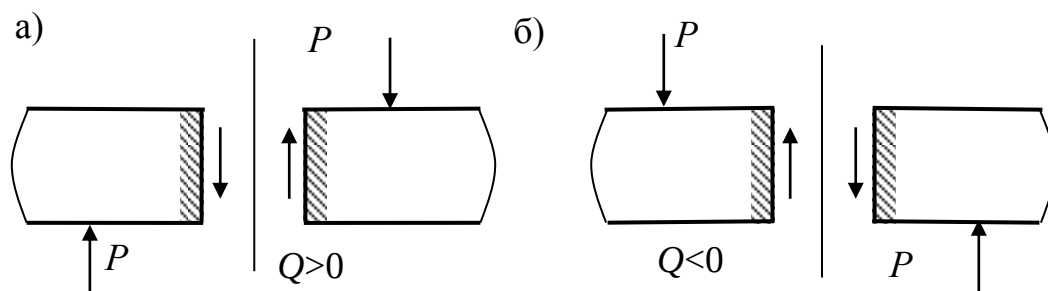


Рис. 2.17. Правила знаков для положительной (а) и отрицательной (б) поперечных сил при изгибе

Изгибающий момент в сечении балки считается положительным, если нижние волокна растягиваются, а верхние сжимаются (рис. 2.18, а), и отрицательным – верхние растягиваются, а нижние сжимаются (рис. 2.18, б)

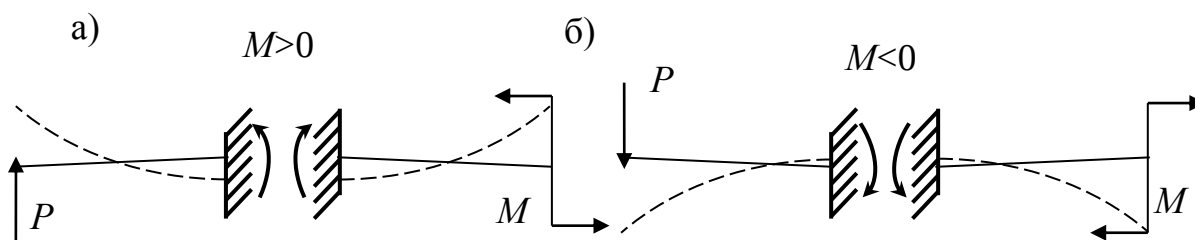


Рис. 2.18. Правила знаков для положительного (а) и отрицательного (б) изгибающего момента

Из рис. 2.18 следует более удобное для запоминания правило знаков изгибающих моментов. Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз (рис. 2.18, а) и наоборот.

2.5.4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Построение эпюр Q и M выполняют в следующем порядке.

1. Определяют опорные реакции с помощью уравнений статики, например:

$$\begin{aligned}\sum P_{iy} &= 0; \\ \sum m_A(P_i) &= 0,\end{aligned}\tag{2.62}$$

где y – ось балки; A – любая точка лежащая на оси z .

2. Балка разбивается на n участков. Границами участков будут сечения, в которых меняется характер нагрузки. Это сечения, где приложены сосредоточенная сила, пара сил, начинается или заканчивается распределённая нагрузка.

3. Для каждого участка по формулам (2.60) и (2.61) составляют в общем виде выражения Q и M в зависимости от текущей координаты z .

4. Для характерных сечений определяют значения Q и M . Эта операция может быть выполнена без составления выражений (2.60), (2.61). В этом случае для построения эпюр Q и M используют правила контроля эпюр, основанные на дифференциальных зависимостях:

$$\frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{dM}{dz} = Q.\tag{2.63}$$

5. С помощью значений Q и M , полученных в п. 4 строят эпюры этих усилий.

2.5.5. Подбор сечения

1. Определяем опасное сечение.

Опасным сечением будет сечение, где изгибающий момент достигает максимального по абсолютной величине значения $|M|_{\max}$.

2. Определяют расчётный момент сопротивления сечения изгибу[^]

$$W_{x_{расч}} = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (2.64)$$

3. Подбирают размеры сечения из условия

$$W_x \geq W_{x_{расч}}, \quad (2.65)$$

а) для прокатных профилей – по сортаменту;

б) для непрокатных профилей – методом последовательных приближений или путём выражения W_x сечения через некоторый параметр размеров сечения по формуле

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad (2.66)$$

где I_x – момент инерции, $y_{\max}$ – координата наиболее удаленной точки от нейтральной линии.

2.5.6. Пример

Для заданных двух схем балок (рис. 2.19) написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти $M_{\max}$ и подобрать:

а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8$ МПа;

б) для схемы (б) сечение из швеллера при $[\sigma] = 160$ МПа.

1. Для балки, приведённой на рис. 2.19, а, построить эпюры Q и M методом уравнений, если дано: $P_1 = 30$ кН, $P_2 = 20$ кН, $m_1 = 15$ кН·м, $q_1 = 5$ кН/м, $a = 2$ м.

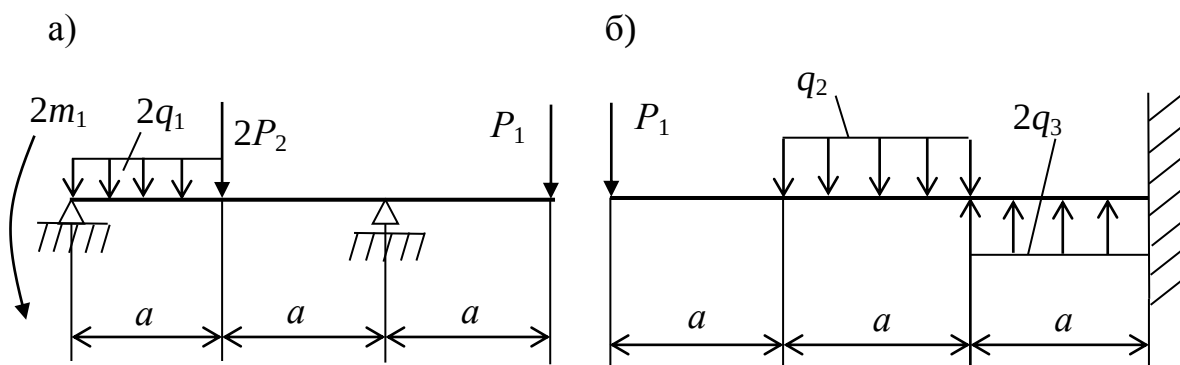


Рис. 2.19. Расчётные схемы примера

Решение

а. Отбрасываем связи, заменив их действие реакциями, и составляем уравнения равновесия (рис. 2.20, а), используя формулы (2.62):

$$\sum m_A = Y_B \cdot 2a - P_1 \cdot 3a - 2P_2 \cdot a - 2q_1 \cdot a^2 / 2 + 2m_1 = 0,$$

$$Y_B \cdot 4 - 30 \cdot 6 - 40 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 / 2 + 30 = 0,$$

$$Y_B = 62,5 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B = -Y_A \cdot 2a + 2m_1 + 2q_1 a \cdot 1,5a + 2P_2 a - P_1 a = 0,$$

$$-Y_A \cdot 4 + 30 + 10 \cdot 2 \cdot 3 + 40 \cdot 2 - 30 \cdot 2 = 0,$$

$$Y_A = 27,5 \text{ кН}.$$

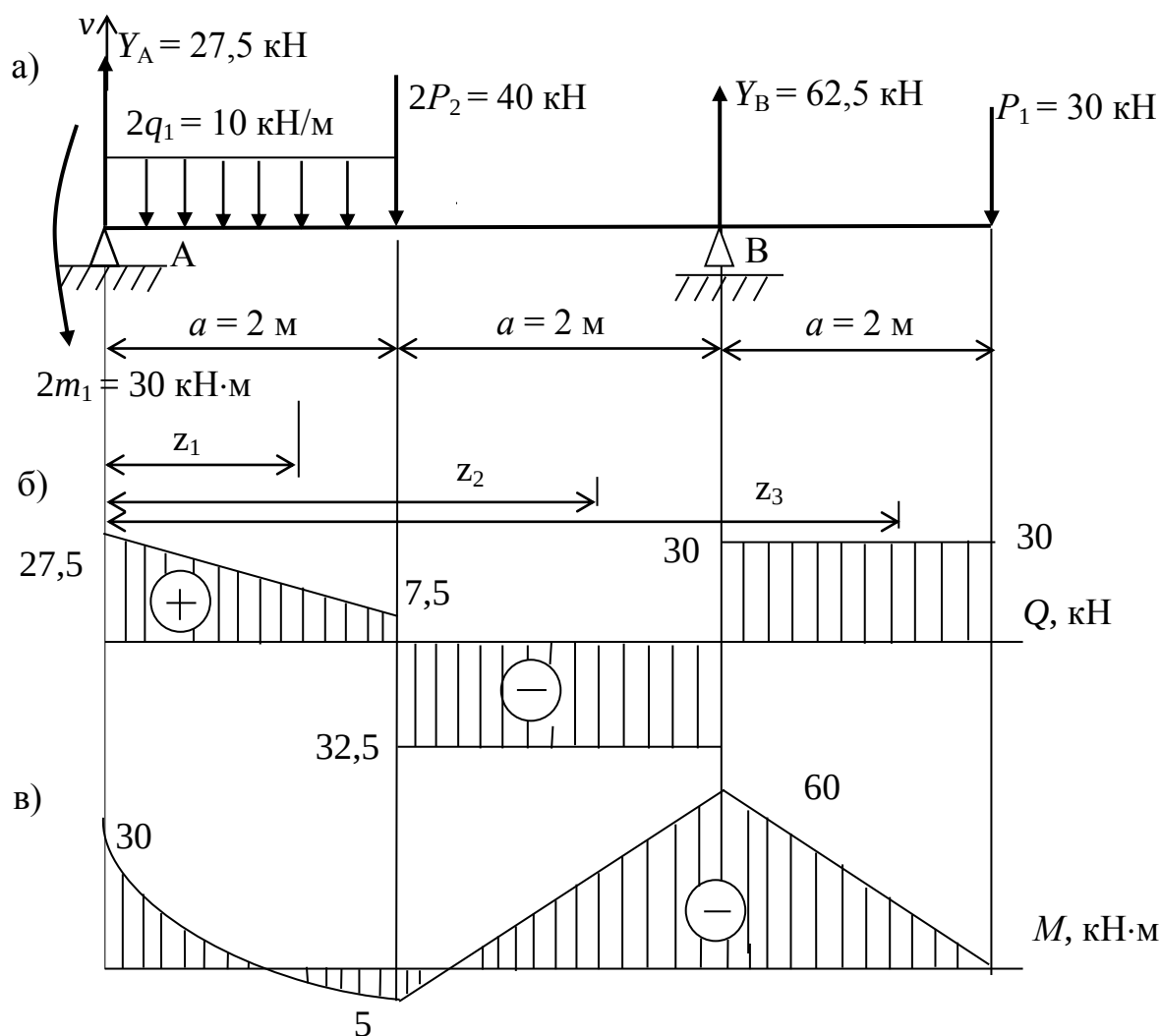


Рис. 2.20. Схема балки (а), эпюры Q (б) и M (в)

Проверка:

$$\sum Y = 0,$$

$$Y_a + Y_b - 2q_1a - 2P_2 - P_1 = 0,$$

$$27,5 + 62,5 - 10 \cdot 2 - 40 - 30 = 0.$$

Следовательно, реакции опор определены правильно.

б. Разбиваем балку на участки и составляем уравнения Q и M для каждого участка, используя формулы (2.60) и (2.61).

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 2$ м (рис. 2.20, а):

$$Q(z_1) = \sum_{\text{лев}} P_{yi} = Y_A - 2q_1z_1,$$

$$M(z_1) = \sum_{\text{лев}} m(p_i) = -2m_1 + Y_A z_1 - 2q_1 \frac{z_1^2}{2}.$$

Результат подсчета сводим в таблицу 6.1.

Таблица 6.1

z_1 , м	0	2
$Q(z_1)$, кН	27,5	7,5
$M(z_1)$, кН·м	–30	5

Второй участок $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$ (рис. 2.20, а):

$$Q(z_2) = \sum_{\text{лев}} P_{yi} = Y_A - 2q_1a - 2P_2,$$

$$M(z_2) = \sum_{\text{лев}} m(p_i) = -2m_1 + Y_A z_2 - 2q_1 \cdot a(z_2 - \frac{a}{2}) - 2P_2(z_2 - a).$$

Результат подсчета сводим в таблицу 6.2.

Таблица 6.2

z_2 , м	2	4
$Q(z_2)$, кН	–32,5	–32,5
$M(z_2)$, кН·м	5	–60

Третий участок $4 \text{ м} \leq z_3 \leq 6 \text{ м}$ (рис. 2.20, а):

В данном случае целесообразнее при составлении уравнений $Q(z_3)$ и $M(z_3)$ взять все внешние силы с правой стороны от рассматриваемого сечения:

$$Q(z_3) = \sum_{np} P_{yi} = P_1,$$

$$M(z_3) = \sum_{np} m(p_i) = -P_1(3a - z_3).$$

Результат подсчета сводим в таблицу 6.3.

Таблица 6.3

$z_3, \text{ м}$	4	6
$Q(z_3), \text{ кН}$	30	30
$M(z_2), \text{ кН}\cdot\text{м}$	–60	0

в. Для определения знаков слагаемых, входящих в выражения для $M(z)$, удобно использовать следующий приём:

– мысленно представить отсечённую часть (здесь и далее левую) в виде консоли с заделкой в месте проведения сечения;

– приложить нагрузку и проанализировать характер изгиба консоли от неё, выяснить, какие волокна в сечении (заделке) растягиваются;

– присвоить знак слагаемого, учитывающего эту нагрузку, в соответствии с принятым правилом знаков.

Этот приём для второго участка проиллюстрирован на рис. 2.21.

Эпюры Q и M , построенные по значениям табл. 6.1–6.3 показаны на рис. 2.20, б, в.

г. Подбор сечения. Определяем опасное сечение и $|M|_{\max}$ используя построенную эпюру M (см. рис. 2.20, в)

$$|M|_{\max} = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Определяем расчётный момент сопротивления сечения изгибу:

$$W_{x_{расч}} = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Подбираем размеры сечения из условия $W_x \geq W_{x_{расч}}$:

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq 7,5 \cdot 10^{-3},$$

откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,421 \text{ м.}$$

д. Для ускорения построения эпюр можно использовать способ «характерных сечений». Характерными считаются сечения, ограничивающие участок балки. Суть способа состоит в том, что величины Q и M находятся только в этих сечениях, и для дальнейшего построения этих эпюр используют правила контроля эпюр, основанные на дифференциальных зависимостях (2.63).

2. Для балки, приведённой на рис. 2.19, б, построить эпюры Q и M методом характерных сечений, если дано: $P_1 = 10 \text{ кН}$, $q_2 = 20 \text{ кН/м}$, $q_3 = 2 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$.

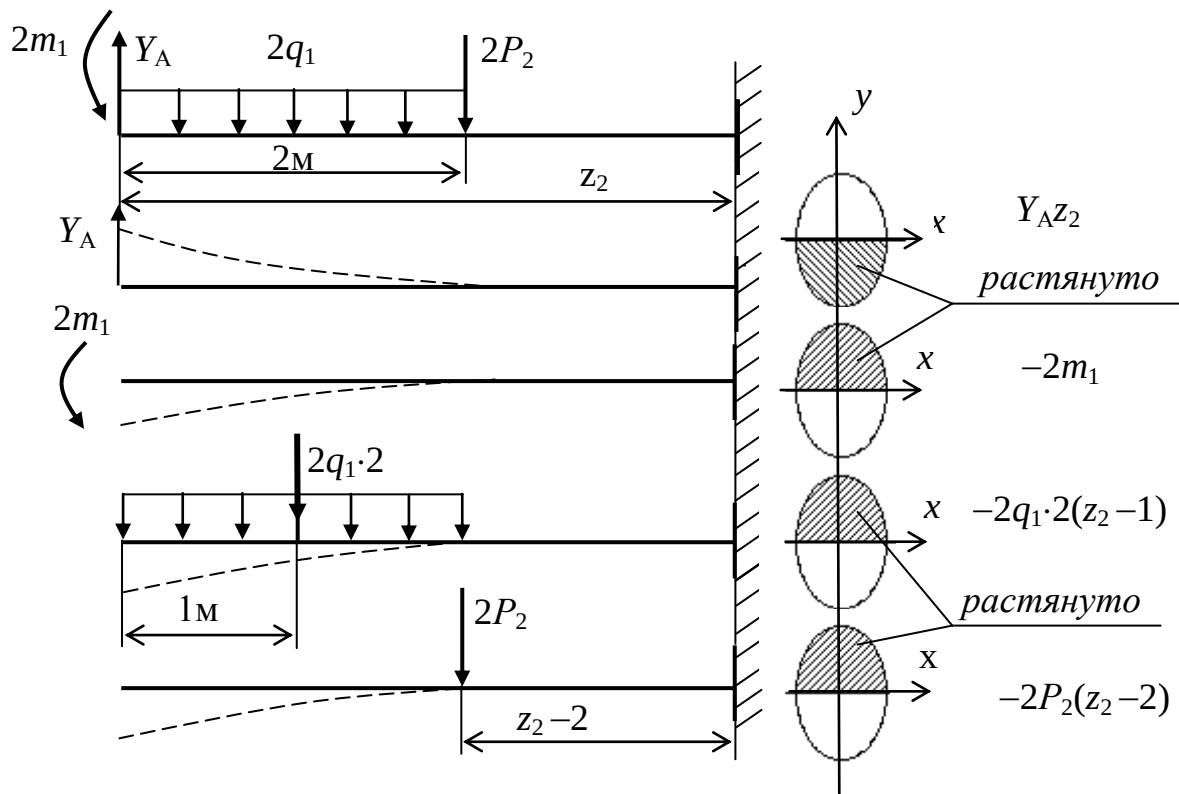


Рис. 2.21. Схема определения знаков M для отдельных видов нагрузки

Решение

а. Для консольной балки нет необходимости определять опорные реакции, так как двигаясь со стороны свободного конца консоли, мы будем знать все силы с одной стороны от сечения (рис. 2.22, а).

б. Для построения эпюр Q и M используем метод характерных сечений:

$$Q_1 = -P_1 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -P_1 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -P_1 - q_2 \cdot 2 = -10 - 20 \cdot 2 = -50 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -P_1 - q_2 \cdot 2 + 2q_3 \cdot 2 = -10 - 20 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = -42 \text{ кН}.$$

Эпюра Q показана на рис. 2.22, б.

$$M_1 = 0,$$

$$M_2 = -P_1 \cdot a = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P_1 \cdot 2 \cdot a - q_2 \cdot a^2 / 2 = -10 \cdot 2 \cdot 2 - 20 \cdot 2^2 / 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\begin{aligned} M_4 &= -P_1 \cdot 3 \cdot a - q_2 \cdot a \cdot 1,5 \cdot a + 2 \cdot q_3 \cdot a^2 / 2 = \\ &= -10 \cdot 3 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 / 2 = -172 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Эпюра M показана на рис. 2.22, в.

в. Подбор сечения (рис. 2.22, в)

$$\begin{aligned} |M|_{\max} &= 172 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ W_{x_{\text{расч}}} &= \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{172 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,075 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1075 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Так как швеллер № 40 имеет $W_x = 761 \text{ см}^3$, то подбираем сечение из двух швеллеров

$$W_x = W_{x_{\text{расч}}} / 2 = 1075 / 2 = 537,5 \text{ см}^3.$$

Принимаем два швеллер № 36 ГОСТ 8240-89, для которых

$$W_x = 2 \cdot 601 = 1202 \text{ см}^3 > W_{x_{\text{расч}}} = 1075 \text{ см}^3.$$

2.5.7. Правила контроля эпюр Q и M

Правила сформулированы для построения эпюр при движении по балке слева направо для растянутого волокна.

1. Если на границе участка приложена сосредоточенная сила, то:

а) на эпюре Q в данном сечении должен быть скачок на величину данной силы в направлении её действия;

б) на эпюре M в данном сечении будет излом, остриём направленный в сторону действия силы.

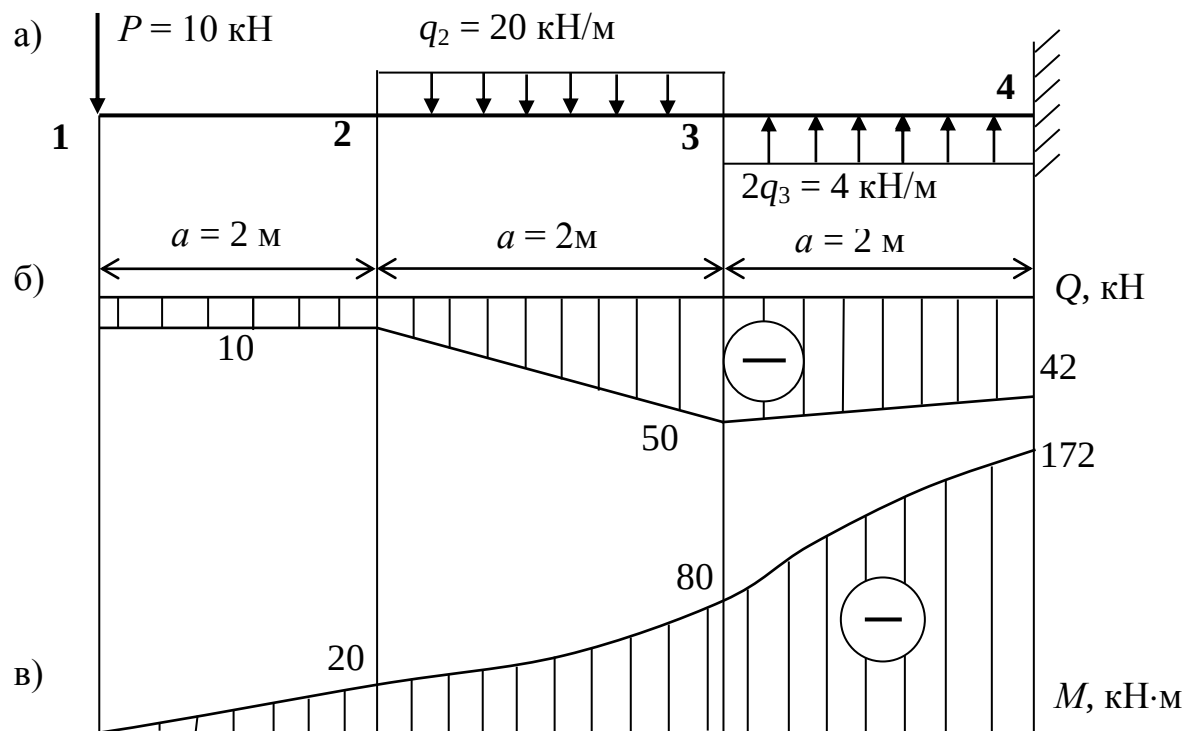


Рис. 2.22. Схема балки (а), эпюры Q (б) и M (в) для примера

2. Если на участке не действует равномерно распределённая нагрузка ($q = 0$), то:

а) эпюра Q представляет собой прямую, параллельную базовой линии эпюры;

б) эпюра M представляет собой прямую, наклонную к базовой линии.

3. Если на участке действует равномерно распределённая нагрузка ($q \neq 0$), то:

а) эпюра Q представляет собой прямую, наклонную к базовой линии, причём если q направлена сверху вниз, то Q убывает;

б) эпюра M представляет собой кривую второго порядка (параболу), выпуклостью направленную в сторону действия q .

4. Если в каком-либо сечении участка, на котором $q \neq 0$, Q равна 0, то на эпюре M в этом сечении будет экстремум, причём если Q меняет знак с (+) на (–), то это максимум.

5. Если на границе участка приложен момент от пары сил m , то на эпюре M в данном сечении будет скачок равный величине этого момента.

6. Если на участке $Q > 0$, то эпюра M возрастает, если $Q < 0$, то эпюра M убывает.

7. Если крайняя опора или конец консоли не загружены моментом от пары сил, то изгибающий момент в данных сечениях равен нулю.

8. Если крайняя опора или конец консоли загружены моментом от пары сил m , то изгибающий момент в данных сечениях равен по величине этому моменту.

2.5.8. Вопросы для самоконтроля

1. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при прямом изгибе?

2. Какой вид изгиба называется прямым?

3. Чему равна поперечная сила в любом поперечном сечении? Правило знаков поперечной силы?

4. Чему равен изгибающий момент в любом поперечном сечении? Правило знаков изгибающего момента?

5. Какие типы опор применяются в расчетных схемах балок?

6. Что такое геометрическая неизменяемость системы?

7. Какой порядок построения эпюр Q и M методом уравнений?

8. Какой порядок построения эпюр Q и M методом характерных сечений?

2.6. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

На практике деформации кручения часто сопутствует изгиб. Например, совместное действие изгиба с кручением приходится учитывать при расчёте валов машин, испытывающих воздействие окружных и радиальных усилий. Сочетание изгиба с кручением имеет место в пространственных рамках, стержнях с ломаной осью, коленчатых валах и других конструкциях и элементах машин и механизмов.

При совместном действии изгиба и кручения в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние силовые факторы: крутящий момент $M_{кр}$, изгибающий момент $M_{и}$ и поперечная сила Q , которой обычно пренебрегают, т. к. связанные с ней касательные напряжения намного меньше касательных напряжений, связанных с крутящим моментом.

2.6.1. Эквивалентные напряжения при действии изгиба с кручением бруса круглого поперечного сечения

Рассмотрим брус круглого поперечного сечения, подвергнутый кручению и изгибу (рис. 2.23).

Выведем формулы для расчёта на изгиб с кручением, выразив действующие напряжения $\sigma_{и}$ и $\tau_{к}$ через величины изгибающих и крутящих моментов. При этом воспользуемся либо теорией наибольших касательных напряжений (III), либо теорией удельной потенциальной энергии формоизменения (IV), как наиболее употребительными в современных расчётах. В результате получаются удобные для практического использования формулы определения диаметров валов.

Для круглого сечения наиболее напряжённой точкой является краевая точка A (рис. 2.23), в которой оба напряжения – нормальное от изгиба и касательное от кручения – достигают наибольших значений, определяемых известными формулами:

$$\sigma_{и} = \frac{M_{и}}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}; \quad (2.67)$$

$$\tau_k = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (2.68)$$

Причём осевой момент сопротивления W_x и полярный момент сопротивления W_p для круглого сечения имеют следующие значения:

$$W_x = W_y = W = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3,$$

$$W_p = 2W = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2d^3. \quad (2.69)$$

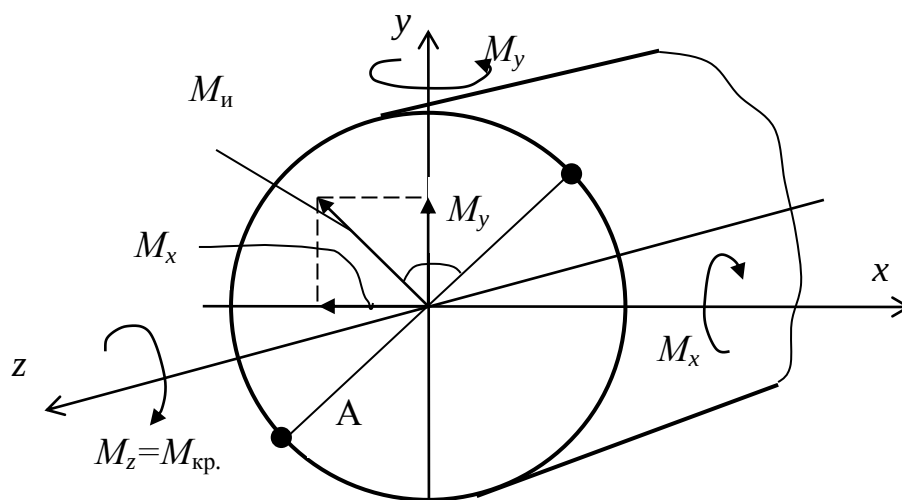


Рис. 2.23. Схема действия нагрузок

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{эkv3} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma]. \quad (2.70)$$

Учитывая формулы (13.1) и (13.2), получим

$$\sigma_{эkv3} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}}{W}, \quad (2.71)$$

где эквивалентный (расчётный) момент по третьей теории прочности имеет следующий вид:

$$M_{\text{экв}3} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2}. \quad (2.72)$$

Тогда условие прочности по третьей теории прочности будет иметь следующий вид

$$\sigma_{\text{экв}3} = \frac{M_{\text{экв}3}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.73)$$

Аналогично получим формулы эквивалентного момента из условия прочности по четвёртой теории:

$$M_{\text{экв}4} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}, \quad (2.74)$$

$$\sigma_{\text{экв}4} = \frac{M_{\text{экв}4}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.75)$$

2.6.2. Вопросы для самоконтроля

1. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при изгибе с кручением?
2. Какие сечения бруса круглого сечения будут опасными при изгибе с кручением?
3. Какие точки круглого поперечного сечения будут опасными при изгибе с кручением?
4. Какое напряженное состояние возникает в опасных точках?
5. Чему равна величина эквивалентного момента (по различным теориям прочности) при изгибе с кручением бруса круглого сечения?

2.7. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Устойчивость или неустойчивость прямолинейной формы оси сжатого стержня существенно зависит от величины сжимающей силы. Нагрузка на стержень, при которой прямолинейная форма перестаёт быть формой устойчивого равновесия, называется критической $P_{\text{кр}}$. При нагрузках, меньших критической, прямолинейная форма оси стержня устойчива. При нагрузках больше критической прямолинейная форма оси стержня становится неустойчивой и стержень может перейти внезапно к новой кри-

волинейной форме равновесия, при которой происходит резкое нарастание прогибов и напряжений в стержне.

В конструкциях и сооружениях допускаются нагрузки значительно меньше критических

$$P \leq [P]. \quad (2.76)$$

Здесь
$$[P] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y}, \quad (2.77)$$

где P – действующая нагрузка; n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Рекомендуемые величины коэффициента запаса устойчивости n_y существенно зависят от материала стержня: для стали n_y равен 1,5...3,0; для дерева 2,5...3,5; для чугуна 4,5...5,5.

2.7.1. Формула Эйлера для определения критической силы

Величина критической сжимающей силы при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия определяется по формуле

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (2.78)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $I_{\min}$ – наименьший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения; ℓ – полная длина стержня; μ – коэффициент приведённой длины.

Величина коэффициента μ зависит от способа крепления торцевых и промежуточных сечений стержня и для наиболее употребительных расчётных схем приведена в приложении П2.

Формула (2.78) для критического значения нагрузки справедлива только при статических нагрузках и при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала стержня:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} \leq \sigma_{\text{пл}}. \quad (2.79)$$

2.7.2. Определение критической силы за пределами пропорциональности. Формула Ясинского

Принимаем следующие обозначения.

Наименьший радиус поперечного сечения стержня

$$i = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}. \quad (2.80)$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}, \quad (2.81)$$

где $\mu \ell$ – приведённая длина стержня.

Критические напряжения по Эйлеру

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (2.82)$$

Обозначим через $\lambda_{\text{пред}}$ гибкость стержня, для которого критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$ равно пределу пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (2.83)$$

Для стержней, у которых $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ (для стали Ст.3, например $\lambda_{\text{пред}} = 100$), критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пц}}$ и для определения критической силы справедлива формула Эйлера (2.78).

Для стержней, у которых $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, критические напряжения $\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{пц}}$. Поэтому для определения критической силы нужно пользоваться эмпирической формулой Ф.С. Ясинского

$$P_{\text{кр}} = F(a - b\lambda), \quad (2.84)$$

где a и b – числовые коэффициенты, имеющие размерность напряжения – (приложение П5); F – площадь сечения стержня; λ – гибкость стержня, определяемая по формуле (2.81).

Обозначим через λ_0 – гибкость стержней, для которых критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$ равно предельному напряжению при сжатии:

для пластичных материалов $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_m$;

$$\text{для хрупких материалов } \sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\sigma} \quad (2.85)$$

Эмпирическая формула (2.84) используется для определения критической силы в случае стержней, гибкость которых заключена в интервале от λ_0 до $\lambda_{\text{пред}}$ (для стали ст.3. $40 < \lambda < 100$). Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называются стержнями малой гибкости и рассчитываются только на прочность.

Значения коэффициентов a , b и значения гибкостей $\lambda_{\text{пред}}$, λ_0 для некоторых материалов даны в приложении П5.

2.7.3. Расчёт на устойчивость по коэффициенту понижения ϕ допускаемого напряжения $[\sigma]^-$

Условие устойчивости сжатого стержня

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{бр}}} \leq [\sigma]_y, \quad (2.86)$$

где $F_{\text{бр}}$ – полная площадь поперечного сечения стержня (при расчёте на устойчивость местные ослабления сечения практически не изменяют величину критической силы); $[\sigma]_y$ – допускаемое напряжение при расчёте на устойчивость, которое равно

$$[\sigma]_y = \phi[\sigma]^-. \quad (2.87)$$

Значения коэффициента понижения ϕ , учитывающие запас устойчивости и зависящие от материала и гибкости стержня, приведены в приложении П4.

Расчётная формула для подбора сечения из условия устойчивости имеет вид

$$F_{\text{бр}} \geq \frac{P}{\phi[\sigma]^-}. \quad (2.88)$$

Так как в формуле (2.88) два неизвестных – $F_{\text{бр}}$ и ϕ , то подбор сечений ведут путём последовательных приближений, варьируя величину коэффициента ϕ .

В первом приближении берут $\phi = 0,5 \dots 0,6$. Определяют требуемую площадь $F_{\text{бр}}$ и подбирают сечение. Подбранное сечение проверяют и устанавливают фактическое значение $\phi_{\text{табл}}$.

Если $\varphi_{1\text{табл}}$ значительно отличается от φ_1 , то и напряжение будет отличаться от допускаемого. Тогда берётся второе приближение, в котором

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\text{табл}}}{2}. \quad (2.89)$$

В результате второго приближения определяют $\varphi_{2\text{табл}}$. Если требуется третье приближение, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2\text{табл}}}{2}. \quad (2.90)$$

И так далее, пока φ и $\varphi_{\text{табл}}$ не совпадут или будут отличаться в пределах 5%.

2.7.4. Пример

Стальной стержень длиной ℓ сжимается силой P (рис. 2.24).

Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при основном допускаемом напряжении на сжатие $[\sigma]^- = 160$ МПа (расчёт производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$); 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости, если дано: $P = 200$ кН, $\ell = 2,2$ м.

Решение

1. Первое приближение

Зададим $\varphi_1 = 0,5$.

По формуле (2.88) находим требуемую площадь поперечного сечения

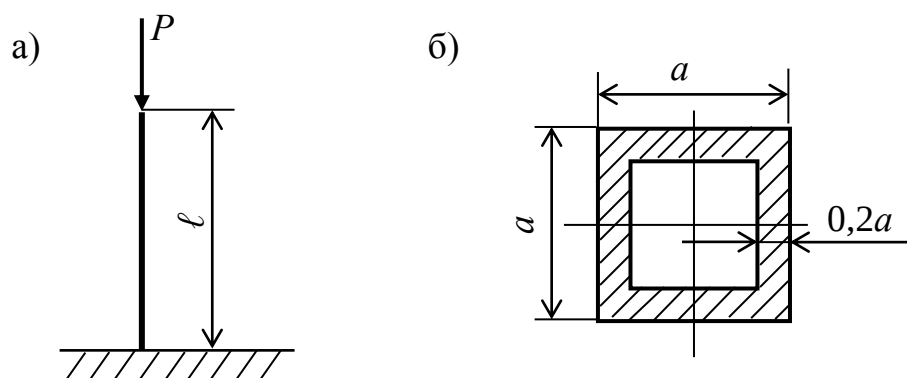


Рис. 2.24. Заданная схема (а) и форма поперечного сечения (б)

$$F_{\text{бр}} \geq \frac{P}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

По приложению П1 находим:

$$F_{\text{бр}} = F = a^2 - (0,6a)^2 = 0,64a^2,$$

$$I_{\text{min}} = I = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,073a^4,$$

$$i_{\text{min}} = i = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{F_{\text{бр}}}} = \sqrt{\frac{0,073a^4}{0,64a^2}} = 0,338a.$$

Следовательно, при

$$F_{\text{бр}} = 0,64a^2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$a = \sqrt{\frac{F_{\text{бр}}}{0,64}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 6,25 \cdot 10^{-2} = 2,11 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

По формуле (2.81) находим гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\text{min}}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,11 \cdot 10^{-2}} = 208,5,$$

где $\mu = 2$ (Приложение П2).

По таблице приложения П4 для $\lambda = 208,5$, $\varphi_{1\text{табл}} = 0 < \varphi_1 = 0,5$.

2. Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1\text{табл}}}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25.$$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$F_{\text{бр}} = \frac{P}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$a = \sqrt{\frac{F_{\text{бр}}}{0,64}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 8,84 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 8,84 \cdot 10^{-2} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,98 \cdot 10^{-2}} = 147,7.$$

По приложению П4, интерполируя, находим коэффициент

$$\varphi_{2\text{табл}} = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 7,7 = 0,33 > \varphi_2 = 0,25.$$

3. Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{2\text{табл}}}{2} = \frac{0,25 + 0,33}{2} = 0,29.$$

Вычисляем необходимую площадь

$$F_{\text{бр}} = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,29 \cdot 160 \cdot 10^6} = 43,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$a = \sqrt{\frac{F_{\text{бр}}}{0,64}} = \sqrt{\frac{43,1 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 8,21 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$i = 0,338a = 0,338 \cdot 8,21 \cdot 10^{-2} = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,2}{2,77 \cdot 10^{-2}} = 158,8.$$

Интерполируя по таблице приложения П4, находим $\varphi_{3\text{табл}} = 0,293$.

Вычисляем напряжение

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_{3\text{табл}} F_{\text{бр}}} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,293 \cdot 43,1 \cdot 10^{-4}} = 158,4 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{160 - 158,4}{160} \cdot 100\% = 1\%, \text{ (допускается } \pm 5\%).$$

Окончательно принимаем

$$a = 8,21 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

4. Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости

Гибкость стержня $\lambda = 158,8 > \lambda_{\text{пред}} = 100$.

Критическая сила по формуле (2.78):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 331,66 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,2)^2} = 337,8 \text{ кН},$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль продольной упругости для стали.

$$I_{\min} = I = \frac{a^4}{12} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,073a^4 = 0,073(8,21 \cdot 10^{-2})^4 =$$

$$= 331,66 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{337,8}{200} = 1,69.$$

2.7.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что такое явление потери устойчивости?
2. Что такое критическая сила и критическое напряжение?
3. Какая величина называется гибкостью стержня?
4. Напишите формулу Эйлера для критической силы?
5. Какой момент инерции входит в формулу Эйлера?
6. Что такое коэффициент приведения длины и чему он равен при различных способах закрепления концов стержня?
7. Каковы границы применимости формулы Эйлера?
8. Вид формулы Ясинского и границы её применения?
9. Как определяется критическая сила по Ясинскому?
10. Что такое коэффициент φ , как определяется его значение?
11. Как проводится проверка стержней на устойчивость с помощью коэффициента φ ?

2.8. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ (УСТАЛОСТЬ)

2.8.1. Переменные напряжения. Усталость

Опыт эксплуатации и исследований конструкций машин и сооружений, воспринимающих переменную циклически меняющуюся нагрузку, показывает, что часто прочность таких кон-

струкций оказывается существенно ниже, чем при статическом нагружении.

Причиной такого поведения являются переменные напряжения. Они приводят к образованию внутри материала микротрещин между зернами материала. При определенной для каждой комбинации условий величине переменных напряжений эти трещины прогрессируют и объединяются в макротрещины. В вершинах таких макротрещин возникает большая концентрация напряжений, что ускоряет процессы и приводит к лавинообразному катастрофическому разрушению детали конструкции.

Описанные процессы были названы усталостным разрушением материала.

В настоящее время под усталостью понимают процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных напряжений, приводящих к образованию макротрещин и разрушению.

Свойство материала сопротивляться усталости называется выносливостью.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при бесконечном числе повторений переменных нагрузок, называется пределом выносливости или пределом усталости.

Изменение напряжений за один период называется циклом напряжений. Различным законам изменения напряжений соответствуют различные виды циклов. Симметричный цикл возникает, если $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, т. е. наибольшее и наименьшее напряжения цикла равны по модулю. Если $\sigma_{\max}$ не равно $\sigma_{\min}$ по абсолютной величине, то цикл называют асимметричным (рис. 2.25). В случаях, когда $\sigma_{\max}$ или $\sigma_{\min}$ равны нулю, циклы называются пульсирующими или отнулевыми.

Для асимметричного цикла (рис. 2.25) будут справедливы следующие зависимости

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad (2.91)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (2.92)$$

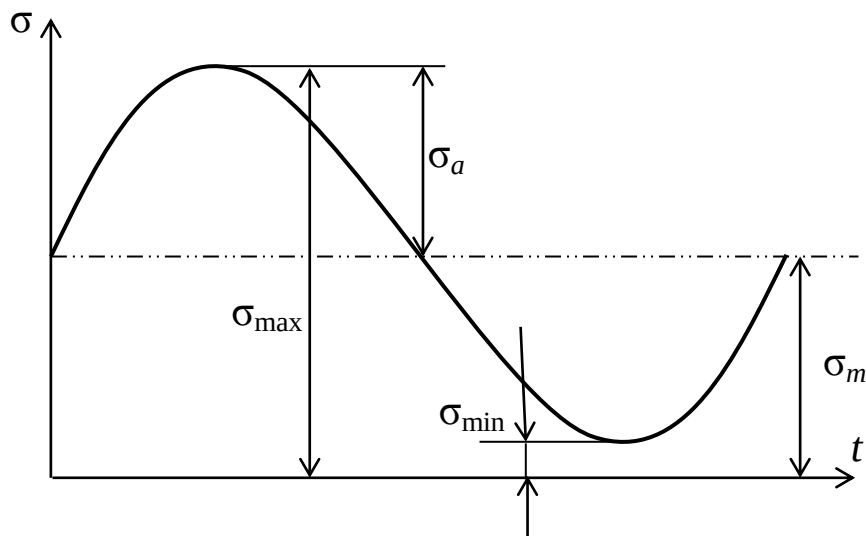


Рис. 2.25. Изменение напряжений во времени при асимметричном цикле

Для характеристики цикла служит коэффициент асимметрии цикла, определяемый выражением

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (2.93)$$

Коэффициенты запаса прочности при изгибе n_σ и при кручении n_τ определяются соответственно из выражений

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon \cdot \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon \cdot \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m}, \quad (2.94)$$

где σ_{-1} , τ_{-1} – соответственно пределы выносливости при симметричных циклах при изгибе и кручении; K_σ , K_τ – эффективные коэффициенты концентрации; ε – масштабный коэффициент; β_1 – коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности; ψ_σ , ψ_τ – коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла, соответственно, при изгибе и кручении.

Для определения коэффициентов запаса при изгибе и кручении необходимо найти максимальные напряжения соответствующих циклов по формулам изгиба и кручения, а затем остальные напряжения соответствующих циклов по их коэффициентам асимметрии и использовать их в формулах (2.94). По

найденным значениям n_σ и n_τ вычисляется общий коэффициент запаса прочности и сравнивается с нормативным (заданным) значением n_0 :

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} > n_0. \quad (2.95)$$

Если условие прочности не выполняется ($n < n_0$), то производится подбор нового диаметра вала из выражения

$$d_n = d_{\text{пр}} \sqrt[3]{\frac{n_0}{n}}, \quad (2.96)$$

где $d_{\text{пр}}$ – прежний диаметр вала, для которого производится проектировочный расчёт; n – вычисленное значение коэффициента запаса прочности; n_0 – нормативное (заданное) значение коэффициента запаса прочности.

Далее все расчёты повторяются для нового диаметра вала до тех пор, пока не будет удовлетворено условие прочности $n > n_0$.

2.8.2. Пример

Определить диаметр вала, если дано: $M_u = 4,2$ кН·м; $M_k = 3,5$ кН·м; $n_0 = 3$; $R_{\text{и}} = 0,4$; $R_{\text{кр}} = -0,7$; материал – сталь 40Г; фактор концентрации III, $b = 0,05$ (полукруглая выточка). Назначаем конструктивно: II, III, V – грубое шлифование; I, IV – тонкое шлифование (см. приложение П 8).

Решение

1. Определяем диаметр вала из условия статической прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв 3}}}{0,1[\sigma]}},$$

где $M_{\text{экв 3}}$ – расчётный момент по 3-й теории прочности

$$M_{\text{экв 3}} = M_p = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{4,2^2 + 3,5^2} = 5,47 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_0}$ – допускаемое напряжение.

Для стали 40Г $\sigma_T = 360$ МПа (см. приложение П7),

$$[\sigma] = \frac{360}{3} = 120 \text{ МПа},$$

тогда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{5,47 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,0769 \text{ м.}$$

По ГОСТ 6636–69 (см. приложение П3) принимаем стандартный диаметр $d = 80$ мм.

2. Определение коэффициента запаса прочности

Механические характеристики для стали 40Г

$$\sigma_T = 360 \text{ МПа}, \quad \sigma_B = 700 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{-1} = 0,31\sigma_B + 70 = 0,31 \cdot 700 + 70 = 287 \text{ МПа},$$

$$\tau_{-1} = 0,54\sigma_{-1} = 0,54 \cdot 287 = 155 \text{ МПа},$$

$$\psi_\sigma = 0,05, \quad \psi_\tau = 0.$$

Концентратор – полукруглая выточка.

Механическая обработка – грубое шлифование

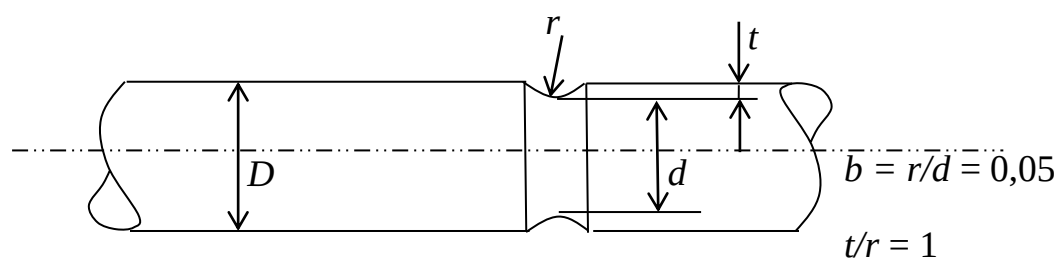


Рис. 2.26. Схема концентратора напряжений

Из таблиц и графиков приложений П9–П13 найдём коэффициенты учитывающие факторы, которые влияют на предел выносливости:

а) при изгибе

$$K_{\sigma} = 1 + \alpha(K_0 - 1) = 1 + 1(1,8 - 1) = 1,8,$$

$$K_0 = 1,8 \text{ при } r/d = 0,05 \text{ и } \sigma_b = 700 \text{ МПа},$$

$$\alpha = 1; \beta = 0,79; \varepsilon = 0,8; \psi_{\tau} = 0,05.$$

б) при кручении

$$K_{\tau} = 1 + \alpha(K_0 - 1) = 1 + 1(1,51 - 1) = 1,51,$$

$$K_0 = 1,51 \text{ при } r/d = 0,05 \text{ и } \sigma_b = 700 \text{ МПа},$$

$$\alpha = 1; \beta = 0,79; \varepsilon = 0,8; \psi_{\tau} = 0.$$

3. Определяем коэффициенты запаса прочности по усталости по формулам (2.94) и (2.95):

а) при изгибе

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max} - R_u \sigma_{\max}}{2} = \\ &= \frac{\sigma_{\max} (1 - R_u)}{2} = \frac{\sigma_{\max} (1 - 0,4)}{2} = 0,3 \sigma_{\max} = \\ &= 0,3 \cdot \frac{M_{\text{и}}}{0,1 d^3} = 0,3 \cdot \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 0,08^3} = 30,47 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max} (1 + R_u)}{2} = \frac{\sigma_{\max} (1 + 0,4)}{2} = \\ &= 0,7 \sigma_{\max} = 0,7 \cdot \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 0,08^3} = 57,42 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$n_{\sigma} = \frac{287}{\frac{1,8}{0,8 \cdot 0,79} \cdot 30,47 + 0,05 \cdot 57,42} = 3,2.$$

б) при кручении

$$\begin{aligned}\tau_m &= \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{\tau_{\max} (1 + R_{kp})}{2} = \frac{\tau_{\max} (1 - 0,7)}{2} = 0,15\tau_{\max} = \\ &= 0,15 \cdot \frac{M_{kp}}{2 \cdot 0,2d^3} = 0,15 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,08^3} = 2,56 \text{ МПа}, \\ \tau_a &= \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{\tau_{\max} (1 - R_{kp})}{2} = \frac{\tau_{\max} (1 + 0,7)}{2} = 0,85\tau_{\max} = \\ &= 0,85 \cdot \frac{M_{kp}}{2 \cdot 0,2d^3} = 0,85 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,08^3} = 14,53 \text{ МПа}, \\ n_\tau &= \frac{155}{\frac{1,51}{0,8 \cdot 0,79} \cdot 14,53 + 0 \cdot 2,56} = 4,46.\end{aligned}$$

Общий коэффициент запаса

$$n = \frac{3,2 \cdot 4,46}{\sqrt{3,2^2 + 4,46^2}} = 2,6 < n_0 = 3,$$

так как условие прочности не выполняется ($n < n_0$), то определяем новый диаметр

$$d_n = 80 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2,6}} = 83,9 \text{ мм},$$

по ГОСТ 6636–69 принимаем $d_n = 90$ мм (приложение ПЗ).

Повторяем определение n_σ , n_τ и n для нового диаметра:

а) при изгибе

$$\begin{aligned}\sigma_m &= 0,7\sigma_{\max} = 0,7 \cdot \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 0,09^3} = 40,33 \text{ МПа}, \\ n_\sigma &= \frac{287}{\frac{1,8}{0,62 \cdot 0,79} \cdot 17,28 + 0,05 \cdot 40,33} = 4,38,\end{aligned}$$

где $\varepsilon = 0,62$ (при $d = 90$ мм);

б) при кручении

$$\tau_a = 0,85\tau_{\max} = 0,85 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,09^3} = 10,2 \text{ МПа},$$

$$n_\tau = \frac{155}{\frac{1,51}{0,62 \cdot 0,79} \cdot 10,2} = 4,93,$$

$$n = \frac{4,38 \cdot 4,93}{\sqrt{4,38^2 + 4,93^2}} = 3,27 > n_0 = 3.$$

Условие прочности выполняется ($n > n_0$) и расчет завершен.

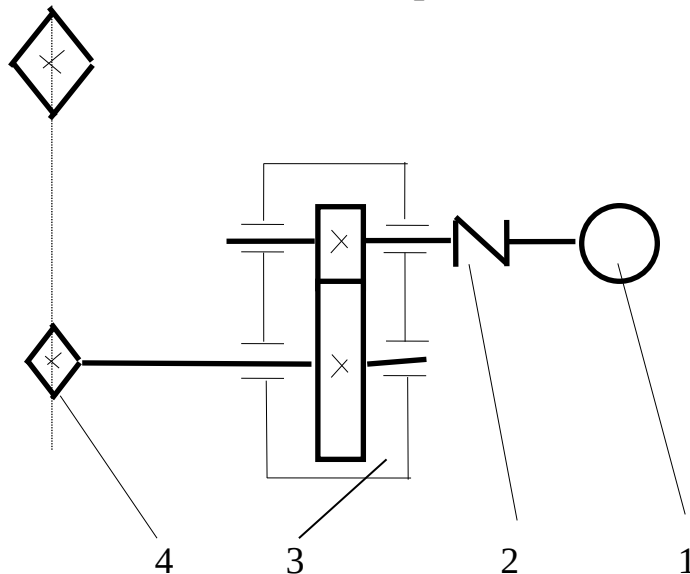
2.8.3. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется циклом напряжений?
2. Чему равны: среднее напряжение цикла, максимальное и минимальное напряжение, амплитуда и коэффициент асимметрии цикла?
3. Какие циклы называются подобными?
4. Что называется пределом выносливости?
5. Как определяются эффективные коэффициенты концентрации напряжений?
6. От каких факторов зависит величина коэффициента запаса прочности?

РАЗДЕЛ 3. ДЕТАЛИ МАШИН

3.1. Задание на комплексную расчетно-графическую работу

Рассчитать и сконструировать цилиндрический одноступенчатый редуктор к приводу цепного конвейера по заданным исходным значениям, и расчетной кинематической схеме.



Вариант А

- 1. Электродвигатель
- 2. Муфта упругая
- 3. Редуктор цилиндрический
- 4. Цепная передача

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кВт	0,9	1,2	1,6	2,6	3,6	3,8	4,6	6,2	6,7	11
n , об/мин	73	82	95	106	118	164	209	261	311	92

Шестерня: Сталь 40Х; НВ 262, улучшение. Колесо: Сталь 45 НВ 207, нормализация.

Расчетная часть: выбор электродвигателя, кинематический и силовой расчет, расчет зубчатых колес редуктора, предварительный расчет валов редуктора, конструктивные размеры шестерни и колеса, конструктивные размеры корпуса редуктора, предварительная компоновка редуктора, проверка долговечности подшипника ведущего вала, проверка прочности шпоночных соединений, уточненный расчет ведущего вала, выбор сорта масла.

Графическая часть: компоновка редуктора – миллиметровка.

3.2. ВЫБОР ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

3.2.1. Задача

Выбрать тип электродвигателя.

3.2.2. Данные для расчета

Мощность на приводном валу $P = 11$ кВт.

Частота вращения приводного вала $n_{\text{пр}} = 92$ мин⁻¹.

3.2.3. Общий КПД привода

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4^3 = 0,98 \cdot 0,97 \cdot 0,94 \cdot 0,99^3 = 0,87.$$

По табл. 1.1, П14 принимаем:

$\eta_1 = 0,98$ – КПД муфты;

$\eta_2 = 0,97$ – КПД цилиндрической передачи;

$\eta_3 = 0,94$ – КПД цепной передачи;

$\eta_4 = 0,99$ – КПД учитывающий потери пары подшипников качения.

3.2.4. Требуемая мощность электродвигателя

$$P_{\text{тр}} = P/\eta = 11/0,87 = 12,64 \text{ кВт.}$$

3.2.5. Ориентировочное передаточное отношение привода

$$i'_{\text{пр}} = i'_{\text{зп}} \cdot i'_{\text{цп}},$$

где $i'_{\text{зп}} = 2 \div 6$ – передаточное отношение зубчатой пары; $i'_{\text{цп}} = 3 \div 6$ – передаточное отношение цепной передачи. Принимаем $i'_{\text{зп}} = 5$, $i'_{\text{цп}} = 3$, тогда $i'_{\text{пр}} = 5 \cdot 3 = 15$.

3.2.6. Ориентировочная частота вращения вала двигателя

$$n'_{\text{дв}} = n_{\text{пр}} \cdot i'_{\text{пр}} = 92 \cdot 15 = 1380 \text{ мин}^{-1}.$$

3.2.7. Выбор электродвигателя

По ГОСТу 19523–81 принимаем закрытый обдуваемый электродвигатель типоразмера 4А160S4У3, [табл. 1.3, П14]; $P_{\text{дв}} = 15$ кВт, $n_c = 1500$ мин⁻¹, $s = 2,3$ %, $n_{\text{ном}} = n_c(1 - s) = 1500 \times (1 - 0,023) = 1465,5$ об/мин, $d = 48$ мм.

3.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

3.3.1. Задача расчета

Определить передаточное отношение привода при выбранном двигателе и разбить его по ступеням.

Определить частоты вращения валов, мощности и вращающие моменты на валах.

3.3.2. Данные для расчета

Требуемая мощность двигателя $P_{\text{дв}} = 12,64$ кВт (расчет произведен по величине требуемой мощности).

Номинальная частота вращения двигателя

$$n_{\text{ном}} = 1465,5 \text{ мин}^{-1}.$$

Частота вращения приводного вала $n_{\text{пр}} = 92 \text{ мин}^{-1}$.

Передаточное отношение цепной передачи $i_{\text{цп}} = 3,25$.

Частные значения КПД: $\eta_1 = 0,98$; $\eta_2 = 0,97$; $\eta_3 = 0,94$; $\eta_4 = 0,99$.

3.3.3. Передаточное отношение привода

$$i_{\text{пр}} = n_{\text{ном}}/n_{\text{пр}} = 1465,5/92 = 15,93.$$

Тогда $i_{\text{зп}} = i_{\text{пр}}/i_{\text{цп}} = 15,93/3,25 = 4,9$.

3.3.4. Частота вращения валов

Ведущего вала редуктора

$$n_1 = n_{\text{ном}} = 1465,5 \text{ мин}^{-1}.$$

Ведомого вала редуктора

$$n_2 = n_1/i_{\text{зп}} = 1465,5/4,9 = 299,08 \text{ мин}^{-1}.$$

Ведомого вала цепной передачи

$$n_3 = n_2/i_{\text{цп}} = 299,08/3,25 = 92 \text{ мин}^{-1}.$$

3.3.5. Мощности на валах

На ведущем валу редуктора

$$P_1 = P_{\text{тр}} \cdot \eta_1 \cdot \eta_4 = 12,64 \cdot 0,98 \cdot 0,99 = 12,26 \text{ кВт.}$$

На ведомом валу редуктора

$$P_2 = P_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_4 = 12,26 \cdot 0,97 \cdot 0,99 = 11,78 \text{ кВт.}$$

На ведомом валу цепной передачи

$$P_3 = P_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 = 11,78 \cdot 0,94 \cdot 0,99 = 11 \text{ кВт.}$$

3.3.6. Вращающие моменты на валах

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P \cdot 30}{\pi \cdot n} = 9,55 \frac{P}{n}, \text{ Н} \cdot \text{м} - P, \text{ Вт}; n, \text{ мин}^{-1}.$$

На ведущем валу редуктора

$$T_1 = 9,55 P_1 / n_1 = 9,55 \cdot 12,26 \cdot 10^3 / 1465,5 = 79,89 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

На ведомом валу редуктора

$$T_2 = 9,55 P_2 / n_2 = 9,55 \cdot 11,78 \cdot 10^3 / 299,08 = 376,15 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

3.4. РАСЧЕТ ЗУБЧАТОЙ ПАРЫ НА ПРОЧНОСТЬ

3.4.1. Задача расчета

Определить размеры передачи из условия контактной выносливости материала поверхности зубьев. Провести проверочные расчеты: 1) на усталость рабочих поверхностей (по контактными напряжениям); 2) на объемную прочность (с целью проверки модуля по напряжениям изгиба).

3.4.2. Условия расчета

При расчете полагаем, что коэффициент долговечности K_{HL} равен 1 (то есть считаем, что передача длительно работающая, так как ресурс наработки $L_h = 32 \cdot 10^3$ ч). Нагрузка постоянная, передача неревверсивная.

3.4.3. Данные для расчета

Максимальный вращающий момент $T_2 = 376,15 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Передаточное отношение зубчатой пары $i_{3п} = 4,9$.

Частота вращения ведомого вала $n_1 = 1465,5 \text{ мин}^{-1}$.

3.4.4. Выбор материалов для зубчатых колес

Так как в задании нет особых требований в отношении габаритов передачи, выбираем материалы со средними механическими характеристиками [табл. 3.3, П14]: шестерня – сталь 45, улучшение, НВ 230÷260; колесо – сталь 45, улучшение, НВ 200÷230.

3.4.5. Допускаемые контактные напряжения

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{Hlimb} \cdot K_{HL}}{[S_H]},$$

где $\sigma_{Hlimb} = 2\text{HB} + 70$; [табл. 3.2, П14]; K_{HL} – коэффициент долговечности, для наших условий; $K_{HL} = 1$; $[S_H]$ – коэффициент безопасности, $[S_H] = 1,1$.

Для прямозубых колес расчетное допускаемое контактное напряжение равно меньшему значению $[\sigma_H]$, полученных для шестерни $[\sigma_{H1}]$ и колеса $[\sigma_{H2}]$, т. е. по менее прочным зубьям.

$$\text{для шестерни } [\sigma_{H1}] = \frac{(2\text{HB}_1 + 70)K_{HL}}{[S_H]} = \frac{(2 \cdot 230 + 70) \cdot 1}{1,1} \approx 482 \text{ МПа},$$

$$\text{для колеса } [\sigma_{H2}] = \frac{(2\text{HB}_2 + 70)K_{HL}}{[S_H]} = \frac{(2 \cdot 200 + 70) \cdot 1}{1,1} \approx 428 \text{ МПа}.$$

тогда $[\sigma_H] = 428 \text{ МПа}$.

Требуемое условие $[\sigma_{H1}] \leq 1,23[\sigma_{H2}]$ выполнено.

3.4.6. Допускаемые напряжения изгиба для шестерни

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{Flimb}^0}{[S_F]}.$$

$$\sigma_{Flimb}^0 = 1,8\text{HB}: [\text{табл. 3.9, П14}]$$

$$\sigma_{Flimb1}^0 = 1,8 \cdot 230 = 415 \text{ МПа};$$

для колеса $\sigma_{Flimb2}^0 = 1,8 \cdot 200 = 360$ МПа;

$[S_F] = [S_F]' [S_F]''$ – коэффициент безопасности,

где $[S_F]' = 1,75$, $[S_F]'' = 1$ (для паковок и штамповок), следовательно

$$[S_F] = 1,75.$$

Допускаемые напряжения:

для шестерни $[\sigma_{F3}] = 415 / 1,75 = 237$ МПа;

для колеса $[\sigma_{F4}] = 360 / 1,75 = 206$ МПа.

3.4.7. Межосевое расстояние из условия контактной выносливости материала поверхности зубьев

Принимаем $K_{H\beta} = 1,25$

Коэффициент ширины венца по межосевому расстоянию

$$\psi_{ba} = b/a = 0,25.$$

$$a = K_a (i_{3п} + 1)^3 \sqrt{\frac{T_2 \cdot K_{H\beta}}{[\sigma_H] H^2 \cdot i_{3п}^2 \cdot \psi_{ba}}} = 49,5 \cdot (4,9 + 1)^3 \sqrt{\frac{376,15 \cdot 10^3 \cdot 1,25}{428^2 \cdot 4,9^2 \cdot 0,25}} =$$

$$= 220,03 \text{ мм},$$

где $K_a = 49,5$ – для прямозубых передач, $i_{3п} = 4,9$.

Ближайшее значение по ГОСТ 2185-66

$$a = 224 \text{ мм (см. табл. 1.2, П14).}$$

3.4.8. Модуль зацепления

$$m = (0,01 \div 0,02) a = (0,01 \div 0,02) 224 = 2,24 \div 4,48 \text{ мм},$$

принимаем по ГОСТ 9563–60 $m = 3$ мм (см. табл. 1.2, П14).

3.4.9. Числа зубьев шестерни и колеса

$$Z_1 = \frac{2a}{(i_{3п} + 1)m} = \frac{2 \cdot 224}{(4,9 + 1)3} = 25,31,$$

принимаем $Z_1 = 25$; тогда $Z_2 = Z_1 \cdot i_{3п} = 25 \cdot 4,9 = 122,5 = 123$.

3.4.10. Передаточное число

Определяем фактическое передаточное число u_{ϕ} и проверяем его отклонение от заданного:

$$u_{\phi} = Z_2/Z_1 = 123/25 = 4,92;$$

$$\frac{4,92 - 4,9}{4,92} \cdot 100\% = 0,41\%, \text{ допускается } 3 \%$$

3.4.11. Фактическое межосевое расстояние

$$A = (Z_1 + Z_2)m / 2 = (25+123)3 / 2 = 222 \text{ мм.}$$

3.4.12. Основные размеры шестерни и колеса

Диаметры делительные

$$d_1 = mZ_1 = 3 \cdot 25 = 75 \text{ мм,}$$

$$d_2 = mZ_2 = 3 \cdot 123 = 369 \text{ мм.}$$

Проверка

$$a = (d_1 + d_2)/2 = (75+369)/2 = 222 \text{ мм.}$$

Диаметры вершин зубьев

$$d_{a1} = d_1 + 2m = 75 + 2 \cdot 3 = 81 \text{ мм,}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m = 369 + 2 \cdot 3 = 375 \text{ мм.}$$

Диаметр впадин зубьев

$$d_{f1} = d_1 - 2,4m = 75 - 2,4 \cdot 3 = 67,8 \text{ мм,}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2,4m = 369 - 2,4 \cdot 3 = 361,8 \text{ мм.}$$

Ширина венца

$$\text{Колеса } b_2 = \psi_{ba} \cdot a = 0,25 \cdot 222 = 55,5 \text{ мм,}$$

принимаем $b_2 = 56 \text{ мм.}$

$$\text{Шестерни } b_1 = b_2 + 5 \text{ мм} = 61 \text{ мм.}$$

3.4.13. Коэффициент ширины шестерни по диаметру

$$\psi_{bd} = b_1/d_1 = 61/75 = 0,81.$$

3.4.14. Окружная скорость колес и степень точности передачи

$$V = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot n_1}{60 \cdot 1000}, \text{ м/с, где } d_1, \text{ мм; } n_1, \text{ мин}^{-1}$$

$$V = \frac{3,14 \cdot 75 \cdot 1465,5}{60 \cdot 1000} = 5,75 \text{ м/с}$$

При такой скорости принимаем 8-ю степень точности.

3.4.15. Коэффициент нагрузки

$$K_H = K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{Hv}.$$

По П14: табл. 3.5, $K_{H\beta} = 1,07$; табл. 3.4, $K_{H\alpha} = 1,00$; табл. 3.6, $K_{Hv} = 1,05$.

тогда $K_H = 1,07 \cdot 1,00 \cdot 1,05 = 1,12$.

3.4.16. Проверка контактных напряжений

$$\sigma_H = \frac{310}{a} \sqrt{\frac{T_2 K_H (u+1)^3}{b_2 \cdot u^2}} = \frac{310}{222} \sqrt{\frac{376,15 \cdot 10^3 \cdot 1,12 (4,9+1)^3}{56 \cdot 4,9^2}} = 317,3 \text{ МПа}$$

$$327,3 \text{ МПа} < [\sigma_H] = 428 \text{ МПа}$$

3.3.17. Силы в зацеплении

Окружная сила

$$F_t = 2T_2/d_2 = 2 \cdot 376,15 \cdot 10^3 / 369 = 2038,75 \text{ Н.}$$

Радиальная сила

$$F_r = F_t \tan \alpha = 2038,75 \tan 20^\circ = 742 \text{ Н.}$$

3.4.18. Проверка зубьев на выносливость по напряжениям изгиба

$$\sigma_F = \frac{F_t K_F Y_F K_{F\alpha}}{bm} \leq [\sigma_F].$$

Здесь коэффициент нагрузки $K_F = K_{F\beta} K_{Fv}$, по табл. 3.7, П14

$K_{F\beta} = 1,15$, по табл. 3.10, П14, $K_{Fv} = 1,25$. Таким образом,

$$K_F = 1,15 \cdot 1,25 = 1,44;$$

Y_F – коэффициент, учитывающий форму зуба и зависящий от числа зубьев Z ;

$$Y_{F1} = 3,9 \text{ и } Y_{F4} = 3,6 \text{ [табл. 3.8, П14],}$$

Находим отношения $[\sigma_F]/Y_F$:

для шестерни $237/3,9 = 60,77 \text{ МПа}$;

для колеса $206/3,6 = 57,22 \text{ МПа}$.

Дальнейший расчет следует вести для зубьев колеса, для которого найденное отношение меньше.

Определяем коэффициент $K_{F\alpha}$:

$$K_{F\alpha} = \frac{4 + (\varepsilon_{\alpha} - 1)(n - 5)}{4\varepsilon_{\alpha}},$$

для средних значений коэффициента торцевого перекрытия $\varepsilon_{\alpha} = 1,5$ и 8 степени точности $K_{F\alpha} = 0,92$.

Проверяем прочность зуба колеса

$$\sigma_{F2} = \frac{F_t K_F Y_{F2} K_{F\alpha}}{b_2 m} \leq [\sigma_F];$$

$$\sigma_{F2} = \frac{2038,75 \cdot 1,44 \cdot 3,6 \cdot 0,92}{56 \cdot 3} = 57,8 \text{ МПа} < [\sigma_{F4}] = 206 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено.

Результаты расчета сводим в таблицу

Характеристика зацепления

Параметр	Обозначение	Значение
1. Число зубьев	шестерни Z_1	25
	колеса Z_2	123
2. Модуль нормальный, мм	m	3
3. Ширина зубчатого венца, мм	b_2	56
4. Степень точности	—	8-B

3.5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТ ВАЛОВ

3.5.1. Задача расчета

Определить диаметры: выходных концов валов, посадочных мест под подшипники, посадочных мест под зубчатые колеса.

3.5.2. Условие расчета

Расчет выполняем на чистое кручение по пониженным допускаемым напряжениям без учета влияния изгиба.

Минимальное значение диаметра выходного конца вала

$$d_{\min} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot [\tau_K]}}, \text{ мм},$$

где T – крутящий момент, Н·мм; $[\tau_k]$ – допускаемое напряжение на кручение, МПа (Н/мм²); рекомендуется $[\tau_k] = 15 \div 25$ МПа (Н/мм²). Полученный результат округляем до ближайшего большего значения по ГОСТ 6636–69 (см. П2).

3.5.3. Данные для расчета

Крутящие моменты: $T_1 = 79,89$ Н·м; $T_2 = 376,15$ Н·м.

Диаметр вала электродвигателя $d_{дв} = 48$ мм.

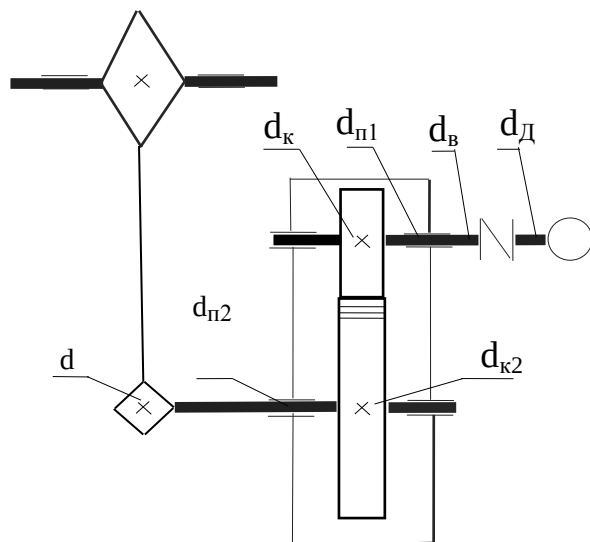


Рис. 3.1. Кинематическая схема привода

Индексы 1, 2 соответствуют ведущему, ведомому валам.

$d_{в1}$; $d_{в2}$ – диаметры выходных концов валов;

$d_{п1}$; $d_{п2}$ – диаметры посадочных мест подшипников;

$d_{к1}$; $d_{к2}$ – диаметры посадочных мест под колеса, звездочки.

3.6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ПОДБОР ПОДШИПНИКОВ

3.6.1. Задачи и условия подбора

Выбор типа подшипника определяется конструкцией редуктора (одноступенчатый прямозубый).

В связи с тем, что в прямозубом зацеплении не возникают осевые усилия, ориентировочно намечаем для валов шарикоподшипники радиальные однорядные легкой серии (ГОСТ 8338–75). Подбирая их по диаметрам посадочных мест.

3.6.2. Данные для подбора

Диаметры валов под подшипники $d_{п1} = 45$ мм; $d_{п2} = 55$ мм.

3.6.3. Вал ведущий

Принимаем подшипники легкой серии 209 [табл. 9.19, П14].

3.6.4. Вал ведомый

Принимаем подшипники легкой серии 211 [табл. 9.19, П14].

3.6.5. Эскиз подшипника и его размеры (рис. 3.2).

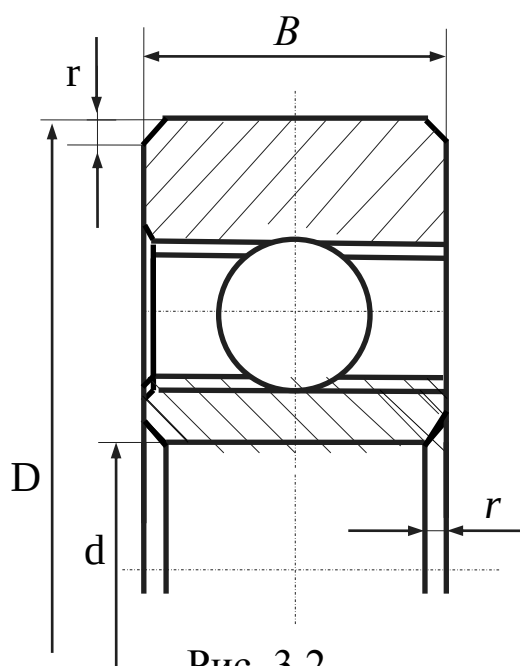


Рис. 3.2

Таблица 3.2 – Размеры подшипника, в миллиметрах

Условное обозначение	d	D	B	Грузоподъемность, кН	
				C	C_0
209	45	85	19	33,2	18,6
211	55	100	21	43,6	25

3.7. ВЫБОР СПОСОБА СМАЗКИ

Зацепления смазываем окунанием зубчатых колес в масло. Уровень масла должен обеспечивать погружение колес на высоту зуба. Объем масляной ванны (из расчета 0,5–0,8 л масла на 1 кВт передаваемой мощности) $V_m = 0,7 \cdot 12,64 = 8,8$ л. Подшипники смазываются тем же маслом за счет разбрызгивания. Вязкость масла выбираем по табл. 10.8, П14, в зависимости от окружной скорости и рекомендуемой вязкости. При $v = 5,75$ м/с и рекомен-

дуемой вязкости масла 22 сСт, по табл. 10.10, П14, выбираем масло индустриальное И-20А.

Уровень масла контролируют жезловым маслоуказателем при остановке редуктора.

3.8. КОНСТРУКТИВНЫЕ РАЗМЕРЫ ДЕТАЛЕЙ РЕДУКТОРА

3.8.1. Конструктивные размеры корпуса редуктора (см. рис. 10.18 и табл. 10.2 и 10.3, П14).

Таблица 3.3

Размеры корпуса редуктора в миллиметрах

Параметры	Ориентировочные соотношения	Размеры
Толщина стенки корпуса и крышки редуктора	$\delta = 0,025a + 1 = 0,025 \cdot 222 + 1 = 6,55$ $\delta_1 = 0,02a + 1 = 0,02 \cdot 222 + 1 = 5,44$	$\delta = \delta_1 = 8$
Толщина верхнего пояса (фланца) корпуса	$b = 1,5 \delta = 1,5 \cdot 8 = 12$	$b = 12$
Толщина нижнего пояса (фланца) крышки корпуса	$b_1 = 1,5 \delta_1 = 1,5 \cdot 8 = 12$	$b_1 = 12$
Толщина нижнего пояса корпуса	$P = 2,35\delta = 2,35 \cdot 8 = 18,8$	$P = 19$
Толщина ребер основания корпуса	$m = (0,85 \div 1)\delta = (0,85 \div 1) \cdot 8 = 8,5 \div 8$	$m = 9$
Толщина ребер крышки	$m_1 = (0,85 \div 1)\delta_1 = (0,85 \div 1) \cdot 10 = 6,8 \div 10$	$m_1 = 8$
Диаметр фундаментных болтов	$d_1 = (0,03 \div 0,036)a + 12 = (0,03 \div 0,036) \cdot 222 + 12 = 18,66 \div 19,99$	$d_1 = 20$
Диаметр болтов: у подшипников соединяющих основание корпуса с крышкой	$d_2 = (0,7 \div 0,75)d_1 = (0,7 \div 0,75) \cdot 20 = 14 \div 15$ $d_3 = (0,5 \div 0,6)d_1 = (0,5 \div 0,6) \cdot 20 = 10 \div 12$	$d_2 = 14$ $d_3 = 10$

3.8.2. Конструктивные размеры шестерни и колеса (см. рис. 10.1,а и табл. 10.1, П14)

Шестерня

$$d_1 = 75 \text{ мм}; d_{a1} = 81 \text{ мм}; d_{f1} = 67,8 \text{ мм}; b_1 = 61 \text{ мм}.$$

Шестерню изготавливаем заодно с валом.

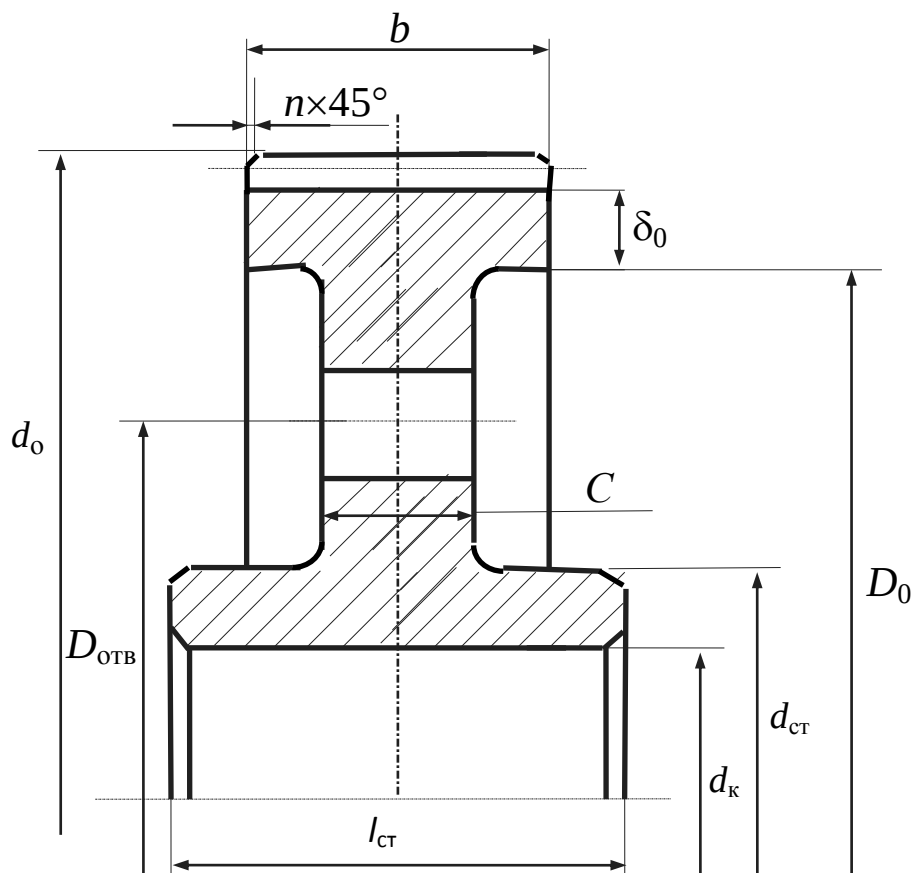


Рис. 3.3

Колесо

$$d_2 = 369 \text{ мм}; d_{a2} = 375 \text{ мм}; d_{f2} = 361,8 \text{ мм}; b_2 = 56 \text{ мм}.$$

Диаметр и длина ступицы колеса

$$d_{ст2} \approx 1,6d_{к2} = 1,6 \cdot 60 = 96 \text{ мм};$$

$$l_{ст2} = (1,2 \div 1,5)d_{к2} = (1,2 \div 1,5) 60 = 72 \div 90 \text{ мм},$$

принимаем $l_{ст} = 80 \text{ мм}$.

Толщина обода

$$\delta_0 = (2,5 \div 4) m_T = (2,5 \div 4) \cdot 3 = 7,5 \div 12 \text{ мм}, \text{ принимаем } \delta_0 = 10 \text{ мм}.$$

Толщина диска

$$C = 0,3b_2 = 0,3 \cdot 56 = 16,8 \text{ мм}, \text{ принимаем } C = 17 \text{ мм}.$$

Внутренний диаметр обода

$$D_0 = d_{f2} - 2\delta_0 = 361,8 - 2 \cdot 10 = 341,8 \text{ мм}.$$

Диаметр центральной окружности

$$D_{отв} = 0,5(D_0 + d_{ст2}) = 0,5 \cdot (341,8 + 96) = 218,9 \text{ мм}.$$

Диаметр отверстий

$$d_{\text{отв}} = \left(\frac{D_0 - d_{\text{ст}}}{4} \right) = \frac{341,8 - 96}{4} = 62 \text{ мм.}$$

3.8.3. Конструирование крышек подшипников

Привертные глухие крышки (рис. 3.4)

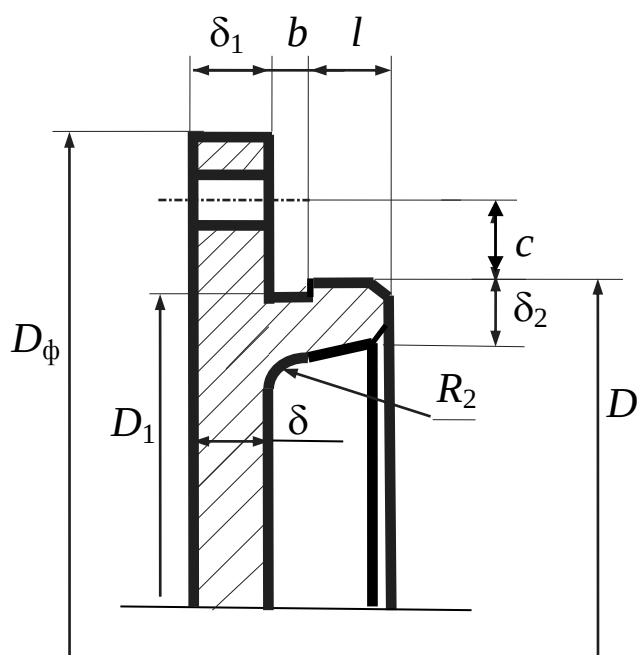


Рис. 3.4

Крышки подшипников изготавливают из чугуна марки СЧ15 ГОСТ 1412–72.

Определяющим при конструировании крышки является диаметр D отверстия в корпусе под подшипник.

Таблица 3.4

Данные для расчета в миллиметрах

D	δ	d	z
85	6	8	4
100	7	10	6

$l = (1,2...1,5)b = (1,2...1,5) \quad 5 = 6...7,5 \text{ мм, где } b \text{ – ширина канавки (см. табл. 6.9) [2].}$

$$\delta_1 = 1,2\delta; \delta_2 = (0,9...1,0)\delta; D_\phi = D + (4,0...4,4)d; C = d.$$

Таблица 3.5

Конструктивные размеры крышек в миллиметрах

Валы	D_ϕ	δ_1	δ_2	c	l	b	D_1
Ведущий1	117	7	6	8	7	5	84
Ведомый2	140	8	8	10	10	8	109

3.9. ПРОВЕРКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПОДШИПНИКА

3.9.1. Ведущий вал (рис. 3.5)

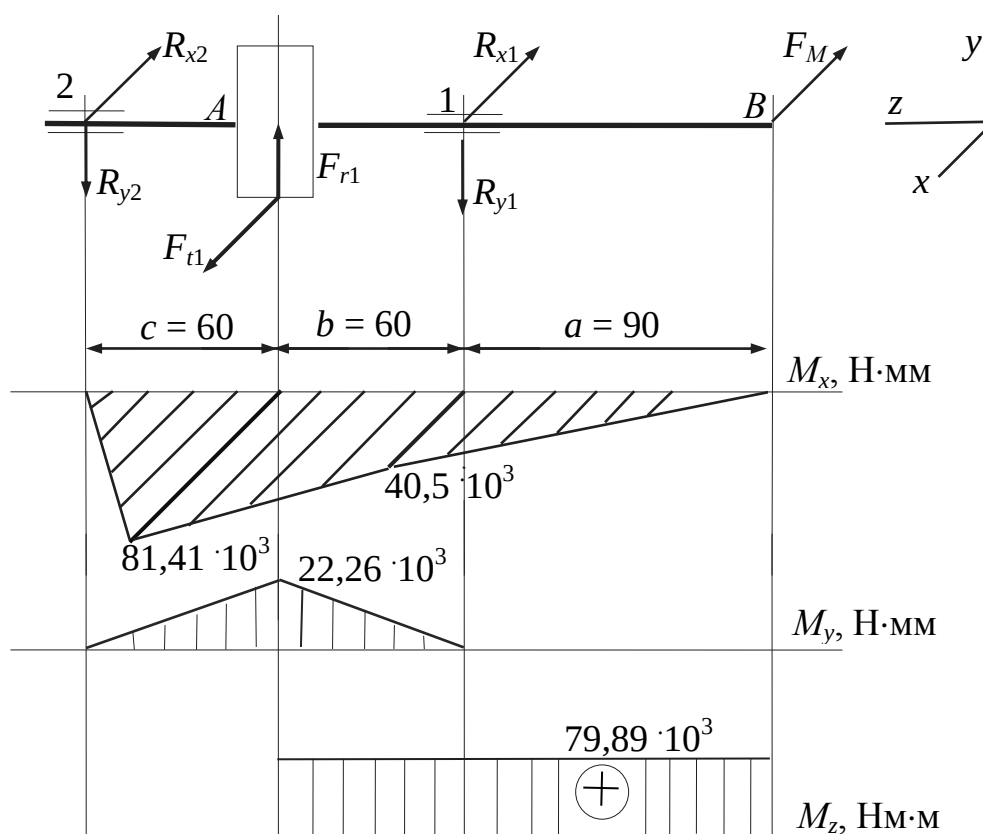


Рис. 3.5. Расчетная схема ведущего вала

3.9.1.1. Определение опорных реакций

Таблица 3.6

Данные для расчета

$T = T_1$	Силы	Плечи
-----------	------	-------

	F_{t1}	F_{r1}	F_M	a	b	c
Из предыдущих расчетов				Из чертежа		
Н·м	Н			мм		
79,89	2038,75	742	450	90	60	60

Сила, действующая на вал со стороны муфты:

$$F_M = 50\sqrt{T_1} = 50\sqrt{79,89} = 450 \text{ Н.}$$

Опорные реакции в плоскости XZ

$$\sum m_2 = R_{x1}(c+b) + F_M(a+b+c) - F_{t1} \cdot c = 0;$$

$$R_{x1} = \frac{F_M(a+b+c) - F_{t1} \cdot c}{c+b} = \frac{450 \cdot (90+60+60) + 2038,75 \cdot 60}{60+60} = 231,88 \text{ Н,}$$

$$\sum m_1 = -R_{x2}(c+b) + F_M a + F_{t1} b = 0;$$

$$R_{x2} = \frac{F_M a + F_{t1} b}{c+b} = \frac{450 \cdot 90 + 2038,75 \cdot 60}{60+60} = 1356,87 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$-R_{x1} - R_{x2} - F_M + F_{t1} = -231,88 - 1356,87 - 450 + 2038,75 = 0.$$

Опорные реакции в плоскости YZ

$$R_{y1} = -R_{y2} = \frac{F_{r1}}{2} = \frac{742}{2} = 371 \text{ Н.}$$

3.9.1.2. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

Эпюра M_y :

$$M_B = 0; M_1 = F_M a = 450 \cdot 90 = 40,5 \cdot 10^3 \text{ Н·мм;}$$

$$M_A = R_{x2} c = 1356,87 \cdot 60 = 81,41 \cdot 10^3 \text{ Н·мм; } M_2 = 0.$$

Эпюра M_x :

$$M_B = M_1 = M_2 = 0; M_A = R_{y2} \cdot c = 371 \cdot 60 = 22,26 \cdot 10^3 \text{ Н·мм.}$$

Эпюра M_z : $M_z^{B-A} = 79,89 \cdot 10^3 \text{ Н·мм; } M_z^{A-2} = 0.$

3.9.1.3. Суммарные реакции

$$F_{r1} = \sqrt{R_{x1}^2 + R_{y1}^2} = \sqrt{231,88^2 + 371^2} = 437,5 \text{ Н;}$$

Выбираем подшипники по наиболее нагруженной опоре 2. (209 ГОСТ 8338–74, П14, табл. 9.19).

Так как подшипники радиальные, то осевые составляющие $R_s = 0$.

Из условия равновесия вала $P_{a1} = P_{a2} = 0$.

По табл. 9.18, П14 находим $X = 1$, $Y = 0$.

3.9.1.4. Эквивалентная динамическая нагрузка

$$P_3 = (V \cdot X \cdot P_r + Y \cdot P_a) K_6 \cdot K_T.$$

Принимаем для наших условий

$V = 1$, $K_T = 1$, $K_6 = 1,25$, тогда

$$P_{32} = V \cdot X \cdot P_{r2} K_6 K_T = 1 \cdot 1 \cdot 1406,68 \cdot 1 \cdot 1,25 = 1758,35 \text{ Н.}$$

3.9.1.5. Расчетная долговечность

$$L = \left(\frac{C}{P_{32}} \right)^3 = \left(\frac{33,2}{1,76} \right)^3 = 6712,3 \text{ млн. об.}$$

3.9.1.6. Расчетная долговечность в часах

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{60 \cdot n_1} = \frac{6712,3 \cdot 10^6}{60 \cdot 1465,5} \approx 76,3 \cdot 10^3 \text{ ч,}$$

полученная долговечность больше требуемой. Подшипники приемлемы.

3.9.2. Ведомый вал (см. рис. 3.6)

3.9.2.1. Определение опорных реакций

Таблица 3.7 – Данные для расчета

$T = T_2$	Силы			Плечи		
	F_{t2}	F_{r2}	$F_{3в}$	a_1	b_1	c_1
Из предыдущих расчетов				Из чертежа		
Н·м	Н			мм		
376,15	2038,75	742	2424	110	65	65

Сила, действующая на вал со стороны звездочки

$$F_{3B} = 125\sqrt{T_2} = 125\sqrt{376,15} = 2424, \text{ Н.}$$

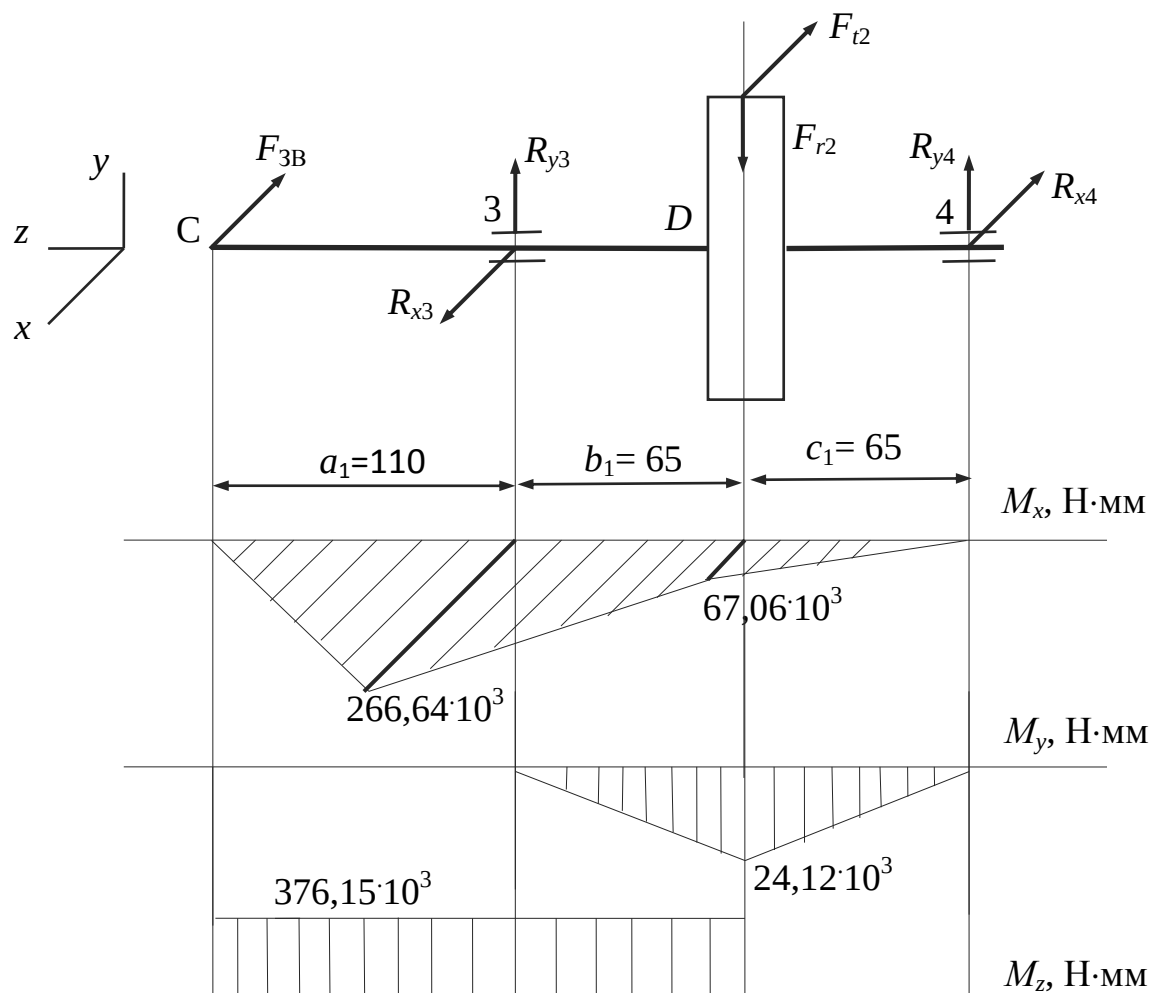


Рис. 3.6. Расчетная схема ведомого вала

3.9.2.2. Опорные реакции в плоскости XZ

$$\sum m_4 = R_{x3}(c_1 + b_1) + F_{3B}(a_1 + b_1 + c_1) - F_{t2} c_1 = 0;$$

$$R_{x3} = \frac{F_{3B}(a_1 + b_1 + c_1) - F_{t2} c_1}{c_1 + b_1} = \frac{2424 \cdot (110 + 65 + 65) + 2038,75 \cdot 65}{65 + 65} =$$

$$= 5494,45 \text{ Н,}$$

$$\sum m_1 = -R_{x2}(c + b) + F_M a + F_{t1} b = 0;$$

$$R_{x2} = \frac{F_M a + F_{t1} b}{c + b} = \frac{450 \cdot 90 + 2038,75 \cdot 60}{60 + 60} = 1356,87 \text{ Н.}$$

$$\sum m_4 = R_{x3} (c_1 + b_1) - F_{3B} (a_1 + b_1 + c_1) - F_{t2} \cdot c_1 = 0;$$

$$R_{x3} = \frac{F_{3B} (a_1 + b_1 + c_1) + F_{t2} c_1}{c_1 + b_1} = \frac{2424 (110 + 65 + 65) + 2038,75 \cdot 65}{65 + 65} =$$

$$= 5494,45 \text{ Н,}$$

$$\sum m_3 = R_{x4} (c_1 + b_1) - F_{3B} a_1 + F_{t2} b_1 = 0;$$

$$R_{x4} = \frac{F_{3B} a_1 + F_{t2} b_1}{c_1 + b_1} = \frac{2424 \cdot 110 - 2038,75 \cdot 65}{65 + 65} = 1031,7 \text{ Н,}$$

Проверка:

$$R_{x3} - R_{x4} - F_{3B} - F_{t2} = 5494,45 - 1031,7 - 2424 - 2038,75 = 0.$$

3.9.2.3. Опорные реакции в плоскости YZ

$$R_{y3} = R_{y4} = \frac{F_{r2}}{2} = \frac{742}{2} = 371 \text{ Н.}$$

3.9.2.4. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

Эпюра M_y :

$$M_C = 0; M_2 = F_{3B} a_1 = 2424 \cdot 110 = 266,64 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм};$$

$$M_D = R_{x4} c_1 = 1031,7 \cdot 65 = 67,06 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм}; M_4 = 0.$$

Эпюра M_x :

$$M_C = M_3 = M_4 = 0;$$

$$M_D = R_{y4} c_1 = 371 \cdot 65 = 24,12 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Эпюра M_z : $M_z^{C-D} = 376,15 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм};$

$$M_z^{D-4} = 0.$$

3.9.2.5. Суммарные реакции

$$P_{r3} = \sqrt{R_{x3}^2 + R_{y3}^2} = \sqrt{5494,45^2 + 371^2} = 5506,96 \text{ Н};$$

$$P_{r4} = \sqrt{R_{x4}^2 + R_{y4}^2} = \sqrt{1031,7^2 + 371^2} = 1096,38 \text{ Н}.$$

Выбираем подшипники по наиболее нагруженной опоре 3 (211 ГОСТ 8338–74, П14, табл. 9.19).

Так как подшипники радиальные, то осевые составляющие $R_s = 0$.

Из условия равновесия вала $P_{a3} = P_{a4} = 0$.

По табл. 9.18, П14 находим $X = 1$, $Y = 0$.

3.9.2.6. Эквивалентная динамическая нагрузка

$$P_9 = (VX \cdot P_r + Y \cdot P_a) K_6 \cdot K_T.$$

Принимаем для наших условий

$$V = 1, \quad K_T = 1, \quad K_6 = 1,25, \text{ тогда}$$

$$P_{93} = VX \cdot P_{r3} K_6 K_T = 1 \cdot 1 \cdot 5506,96 \cdot 1 \cdot 1,25 = 6883,7 \text{ Н}.$$

3.9.2.7. Расчетная долговечность

$$L = \left(\frac{C}{P_{93}} \right)^3 = \left(\frac{43,6}{6,88} \right)^3 = 254,5 \text{ млн. об.}$$

3.9.2.8. Расчетная долговечность в часах

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{60 \cdot n_2} = \frac{254,5 \cdot 10^6}{60 \cdot 299,08} \approx 14,18 \cdot 10^3 \text{ ч},$$

полученная долговечность меньше требуемой. Подшипники не приемлемы.

3.9.2.9. Расчетная динамическая грузоподъемность

$$C_r = P_3 \cdot \sqrt[3]{\frac{573 \cdot \pi \cdot n_2 \cdot L_h}{30 \cdot 10^6}} = 6883,7 \cdot \sqrt[3]{\frac{573 \cdot 3,14 \cdot 299,08 \cdot 32 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} =$$

$$= 57,21 \text{ кН},$$

Принимаем подшипник 311

Таблица 3.8

Размеры подшипника в миллиметрах

Условное обозначение	d	D	B	Грузоподъемность, кН	
				C	C_0
311	55	120	29	71,5	41,5

3.10. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ШПОНОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

3.10.1. Условие расчета

Шпонки призматические со скругленными торцами. Размеры сечений шпонок и пазов и длины шпонок по ГОСТ 23360-78.

Материал шпонок – сталь 45 нормализованная.

Напряжения смятия

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} \approx \frac{2T}{d(h-t_1)(l-b)} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где T – передаваемый вращающий момент, Н·мм;

d – диаметр вала в месте установки шпонки, мм;

h – высота шпонки, мм;

t_1 – глубина паза на валу, мм;

l – длина шпонки, мм;

b – ширина шпонки, мм.

Допускаемые напряжения смятия при стальной ступице $[\sigma_{\text{см}}] = 100 \div 120$ МПа, при чугунной $[\sigma_{\text{см}}] = 50 \div 70$ МПа.

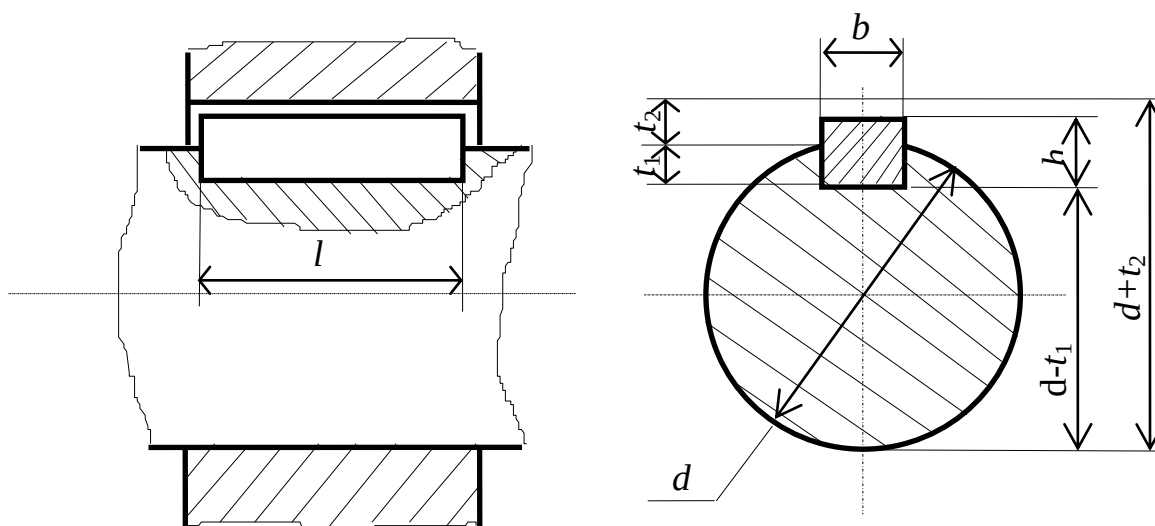


Рис. 9.1. Шпоночное соединение

3.10.2. Данные для расчета (сведены в таблицу)

Таблица 3.9

Данные для расчета шпонок в миллиметрах

Параметр	Валы		
	Ведущий 1	Ведомый 2	
d вала	$d_{в1}=36$	$d_{в2}=50$	$d_{к2}=60$
T , Н·мм	$T_1 = 79,89 \cdot 10^3$	$T_2 = 376,15 \cdot 10^3$	
l ступицы	$l_{вых.1}=60$	$l_{вых.2}=80$	$l_{ст}=80$

3.10.3. Ведущий вал

Шпонка под полумуфту

При $d = 45$ мм, $b \times h = 14 \cdot 9$ мм, $t_1 = 5,5$ мм [1, с. 169]

$l_{шп} = l_{вых.1} - (5 \div 10)$ мм = $60 - (5 \div 10)$ мм = $(55 \div 50)$ мм.

По ГОСТу 23360-78 принимаем $l_{шп} = 50$ мм. Условное обозначение принятой шпонки

Шпонка 14×9×50 ГОСТ 23360-78

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} \approx \frac{2T_1}{d(h-t_1)(l-b)} = \frac{2 \cdot 79,89 \cdot 10^3}{45 \cdot (9-5,5) \cdot (50-14)} = 28,2 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 70 \text{ МПа}.$$

3.10.4 Ведомый вал

Шпонка под малую звездочку

При $d = 50 \text{ мм}$, $b \times h = 14 \cdot 9 \text{ мм}$, $t_1 = 5,5 \text{ мм}$ [1, с. 169]
 $l_{\text{шп}} = l_{\text{вых.1}} - (5 \div 10) \text{ мм} = 80 - (5 \div 10) \text{ мм} = (75 \div 70) \text{ мм}.$

По ГОСТу 23360-78 принимаем $l_{\text{шп}} = 70 \text{ мм}$. Условное обозначение принятой шпонки

Шпонка 14×9×70 ГОСТ 23360-78

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} \approx \frac{2T_2}{d(h-t_1)(l-b)} = \frac{2 \cdot 376,15 \cdot 10^3}{50 \cdot (9-5,5)(70-14)} = 76,76 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 100 \text{ МПа}.$$

3.10.5. Шпонка под колесо

При $d = 60 \text{ мм}$, $b \times h = 18 \cdot 11 \text{ мм}$, $t_1 = 7 \text{ мм}$ [1, с. 169]
 $l_{\text{шп}} = l_{\text{ст}} - (5 \div 10) \text{ мм} = 80 - (5 \div 10) \text{ мм} = (75 \div 70) \text{ мм}.$

По ГОСТу 23360-78 принимаем $l_{\text{шп}} = 70 \text{ мм}$. Условное обозначение принятой шпонки

Шпонка 18×11×70 ГОСТ 23360-78

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} \approx \frac{2T_2}{d(h-t_1)(l-b)} = \frac{2 \cdot 376,15 \cdot 10^3}{60 \cdot (11-7) \cdot (70-18)} = 60,28 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 100 \text{ МПа}.$$

3.10.6. Результаты подбора шпонок (сведены в таблицу)

Таблица 9

Результаты подбора шпонок в миллиметрах

Параметр	Валы		
	Ведущий 1	Ведомый 2	
d вала	$d_{в1}=36$	$d_{в2}=50$	$d_{к2}=60$
$b \times h$	14×9	14×9	18×11
$l_{шп}$	50	70	70

3.11. ПРОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ

3.11.1. Задача расчета

Уточненный расчет состоит в определении коэффициентов запаса прочности s для опасных сечений и сравнении их с требуемыми (допускаемыми) значениями $[S] = 2,5$. Прочность соблюдена при $S \geq [S]$.

$$S = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}}.$$

S_{σ} – коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям,

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \beta} \cdot \sigma_v + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m},$$

где σ_{-1} – предел выносливости стали при симметричном цикле изгиба;

k_{σ} – эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений;

ε_{σ} – масштабный фактор для нормальных напряжений;

β – коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности;

ψ_{σ} – коэффициент чувствительности к асимметрии цикла;

σ_v, σ_m – амплитуда и среднее значение напряжений цикла;

S_{τ} – коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям,

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \beta} \cdot \tau_v + \psi_{\tau} \cdot \tau_m},$$

где τ_{-1} – предел выносливости стали при симметричном цикле кручения.

3.11.2. Условие расчета

Примем, что нормальные напряжения от изгиба изменяются по симметричному циклу, а касательные от кручения – по отнулевому (пульсирующему).

Производим расчет по опасным сечениям валов.

Материал вала – сталь 45 – улучшение.

По табл. 3.3, П14, $\sigma_B = 570$ МПа.

Предел выносливости при изгибе

$$\sigma_{-1} \approx 0,43\sigma_B = 0,43 \cdot 570 = 246 \text{ МПа.}$$

Предел выносливости при кручении

$$\tau_{-1} \approx 0,58\sigma_{-1} = 0,58 \cdot 246 = 142 \text{ МПа.}$$

3.11.3. Ведущий вал

Связи с тем, что шестерня выполнена заодно с валом ($d_{к1} = 50$ мм; $d_{f1} = 67,8$ мм) опасным будет сечение 1 – $d = 45$ мм.

3.11.3.1. Суммарный изгибающий момент в сечении

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_x^2} = \sqrt{(40,5 \cdot 10^3)^2} = 40,5 \cdot 10^3 \text{ Н·мм.}$$

3.11.3.2. Момент сопротивления изгибу

$$W = \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 45^3 / 32 = 8,94 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

3.11.3.3. Момент сопротивления кручению

$$W_K = \pi d^3 / 16 = 3,14 \cdot 45^3 / 16 = 17,88 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$$

3.11.3.4. Концентрация напряжений обусловлена напрессовкой внутреннего кольца подшипника на вал. По приложениям (П6, П8, П9) находим:

$$K_{\sigma}/\varepsilon_{\sigma} = 3; K_{\tau}/\varepsilon_{\tau} = (0,6K_{\sigma}/\varepsilon_{\sigma}) + 0,4 = 0,6 \cdot 3 + 0,4 = 2,2;$$

$$\psi_{\sigma} = 0,15; \psi_{\tau} = 0,1,$$

$\beta = 0,98$ – коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности.

3.11.3.5. Амплитуда нормальных напряжений изгиба

$$\sigma_v = M/W = 40,5 \cdot 10^3 / (8,94 \cdot 10^3) = 4,53 \text{ МПа},$$

среднее напряжение $\sigma_m = 0$.

3.11.3.6. Амплитуда и среднее значение напряжений при кручении

$$\tau_v = \tau_m = T_1 / 2W_K = 79,89 \cdot 10^3 / 2 \cdot 17,88 \cdot 10^3 = 2,23 \text{ МПа}.$$

3.11.3.7. Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \beta} \sigma_v + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{340}{\frac{3}{0,98} \cdot 4,53} = 24,5.$$

3.11.3.8. Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \beta} \tau_v + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} = \frac{197}{\frac{2,2}{0,98} \cdot 2,23 + 0,1 \cdot 2,23} = 37,6.$$

3.11.3.9. Суммарный коэффициент запаса прочности

$$S = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} = \frac{24,5 \cdot 37,6}{\sqrt{24,5^2 + 37,6^2}} = 20,5 > [S] = 2,5.$$

3.11.4. Ведомый вал

Сечение 3, $d = 55$ мм.

3.11.4.1. Суммарный изгибающий момент в сечении

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_x^2} = \sqrt{(266,64 \cdot 10^3)^2} = 266,64 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

3.11.4.2. Момент сопротивления изгибу

$$W = \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 55^3 / 32 = 16,33 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

3.11.4.3. Момент сопротивления кручению

$$W_k = \pi d^3 / 16 = 3,14 \cdot 55^3 / 16 = 32,66 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

3.11.4.4. Концентрация напряжений обусловлена напрессовкой внутреннего кольца подшипника на вал. По приложениям (П6, П8, П9) находим:

$$K_{\sigma/\varepsilon_{\sigma}} = 3,3; K_{\tau/\varepsilon_{\tau}} = (0,6 K_{\sigma/\varepsilon_{\sigma}}) + 0,4 = 0,6 \cdot 3,3 + 0,4 = 2,38;$$

$$\psi_{\sigma} = 0,15; \psi_{\tau} = 0,1,$$

$\beta = 0,98$ – коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности.

3.11.4.5. Амплитуда нормальных напряжений изгиба

$$\sigma_v = \frac{M}{W} = \frac{266,64 \cdot 10^3}{16,33 \cdot 10^3} = 16,3.$$

среднее напряжение $\sigma_m = 0$.

3.11.4.6. Амплитуда и среднее значение напряжений при кручении

$$\tau_v = \tau_m = T_2 / 2W_k = 376,15 \cdot 10^3 / (2 \cdot 32,66 \cdot 10^3) = 5,76 \text{ МПа}.$$

3.11.4.7. Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \beta} \sigma_v + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{340}{\frac{3,3}{0,98} \cdot 16,3} = 6,19.$$

3.11.4.8. Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \beta} \tau_v + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} = \frac{197}{\frac{2,38}{0,98} \cdot 5,76 + 0,1 \cdot 5,76} = 13,5.$$

3.11.4.9. Суммарный коэффициент запаса прочности

$$S = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} = \frac{6,19 \cdot 13,5}{\sqrt{6,19^2 + 13,75^2}} = 5,54 > [S] = 2,5.$$

3.11.5. Результаты проверки сведем в таблицу

Таблица 10

Результаты проверки валов на усталость		
Сечение	1	3
Коэффициент запаса S	20,5	5,54

3.12. ПОСАДКИ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА И ПОДШИПНИКОВ

Посадки назначаем в соответствии с указаниями, приведенными в литературе.

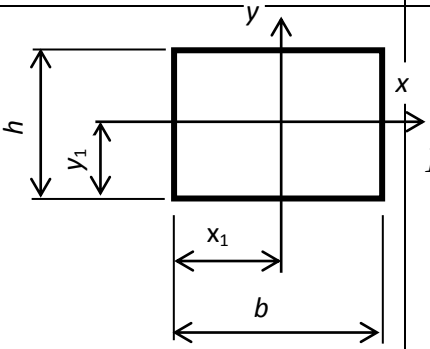
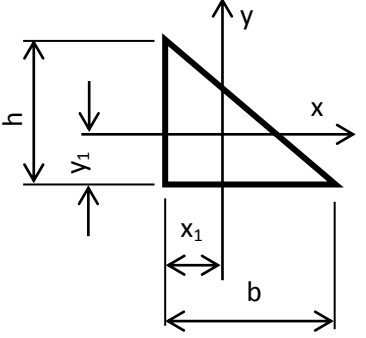
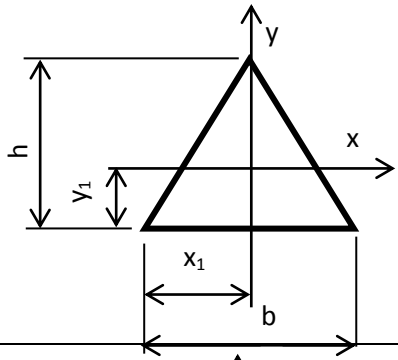
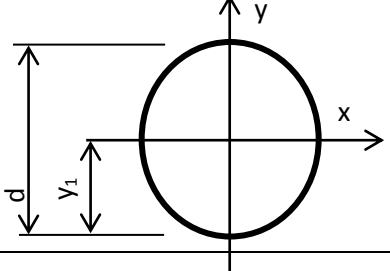
Посадка зубчатого колеса на вал Н7/р6 по ГОСТ 25347-82.

Посадка звездочки цепной передачи на вал редуктора Н7/н6.

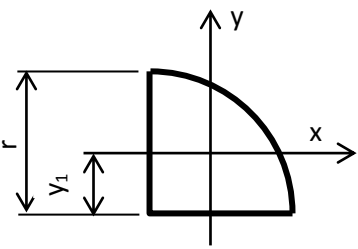
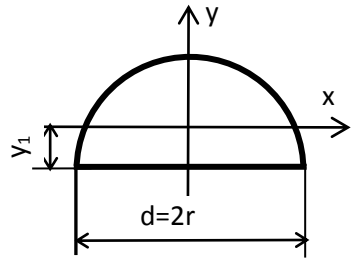
Шейки валов под подшипники выполняем с отклонением вала к6. Отклонения отверстий в корпусе под наружные кольца по Н7.

ПРИЛОЖЕНИЯ

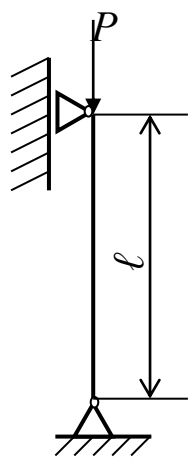
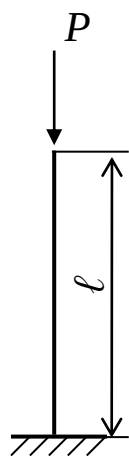
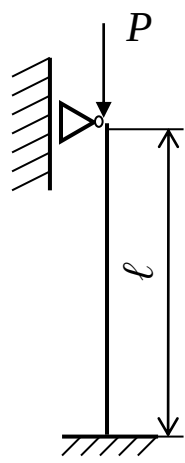
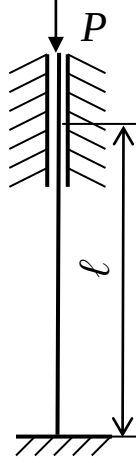
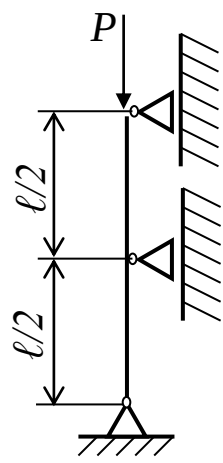
П1. Геометрические характеристики сечений

№ п/п	Эскиз	Площадь сечения F	Моменты инерции I_x, I_y, I_{xy}	Коорд. крайн. точек
1	2	3	4	5
Прямоугольник		$F = bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$ $I_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Прямоугольный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h}{36}$ $I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$x_1 = \frac{b}{3}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Равнобедренный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h}{48}$ $I_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Круг		$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = \frac{d}{2}$

Продолжение П1

1	2	3	4	5
Четверть круга		$F = 0,785r^2$	$I_x = I_y = 0,0549r^4$ $I_{xy} = -0,0165r^4$	$x_1 = y_1 = 0,424r$
Половина круга		$F = 0,393d^2$	$I_x = 0,11r^4$ $I_y = 0,393r^4$ $I_{xy} = 0$	$y_1 = 0,424r$

П 2. Коэффициент приведения длины

				
$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,5$

П 3. Рекомендуемые диаметры валов
(по ГОСТ 6636-69 «Нормальные линейные размеры»)

Ряд R _A 20 (мм)
4; 4,5; 5; 5,6; 6,3; 7,1; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 71; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280; 320; 360; 400

П4. Коэффициент уменьшения основного
допускаемого напряжения φ

Гибкость, λ	Коэффициент, φ			
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,98	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43		0,25
120	0,45	0,36		0,22
130	0,40	0,33		0,18
140	0,36	0,29		0,16
150	0,32	0,26		0,14
160	0,29	0,24		0,12
170	0,26	0,21		0,11
180	0,23	0,19		0,10
190	0,21	0,17		0,09
200	0,19	0,16		0,08

П 5. Параметры формулы Ясинского

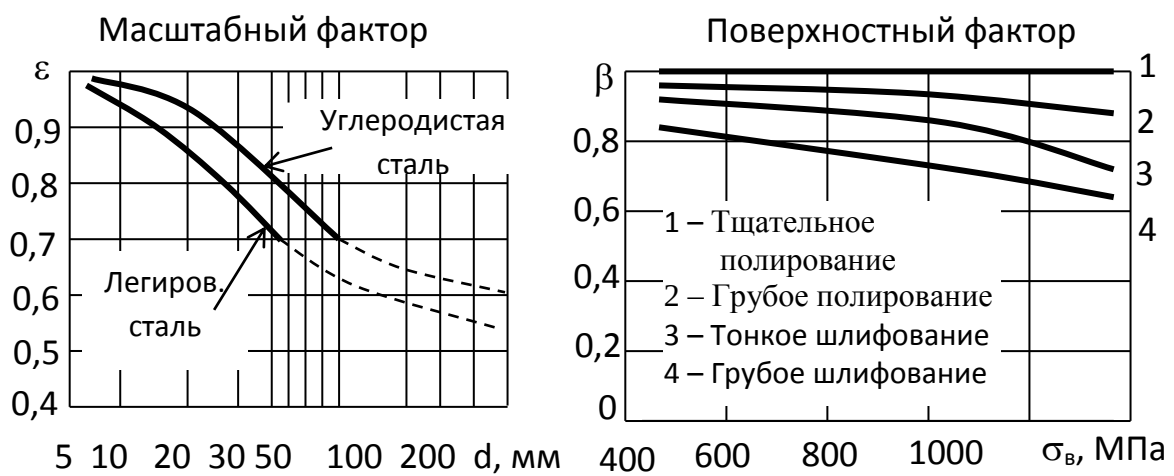
$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda, \text{ границы применимости } \lambda_0 < \lambda \leq \lambda_{пред}$$

Материал	λ_0	$\lambda_{пред}$	a , МПа	b , МПа
Ст.2, Ст.3	40	100	310	1,14
Ст.5	40	100	465	3,26
Сталь 40	60	90	321	1,16
Кремнистая сталь	60	100	589	3,82
Дерево (сосна)	—	110	29,3	0,194
Чугун	—	80	776	12
для чугуна $\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$, где $c = 0,053$ МПа				

П 6. Значения коэффициента ψ

σ_B , МПа	350-500	520-750	700-1000	1000-1200	1200-1400
ψ_σ , изгиб и растяжение	0	0,05	0,10	0,20	0,25
ψ_τ , кручение	0	0	0,05	0,10	0,15

П 7. Номограммы для определения масштабного и поверхностного факторов



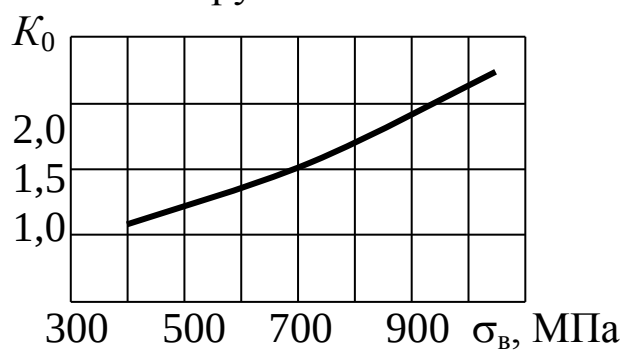
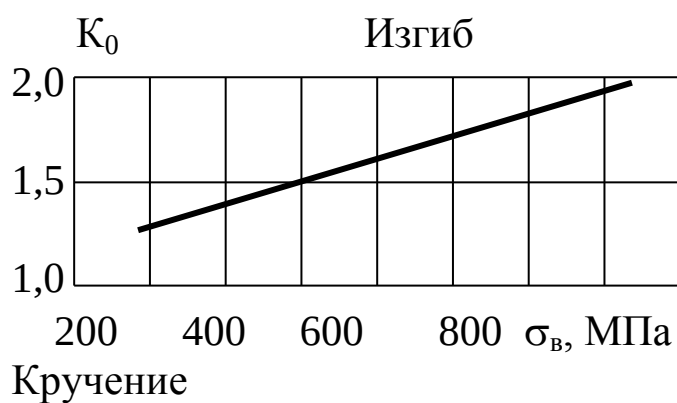
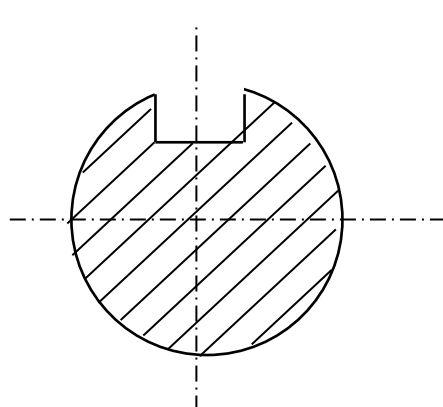
**П 8. Основные механические характеристики сталей
применяемых для изготовления валов**

Вид стали	Марка ста- ли	Предел прочности σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Предел выносливо- сти при изгибе σ_{-1} , МПа	Предел выносливо- сти при кручении τ_{-1} , МПа	Предел выносливо- сти при растяжении σ_{-1p} , МПа
1	2	3	4	5	6	7
Углер. мар- тен. сталь	Сталь3	470	240	$\sigma_{-1} = 0,33\sigma_B + 70$	$\tau_{-1} = 0,53\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1p} = 0,71\sigma_{-1}$
	Сталь4	480	250			
	Сталь5	580	280			
	Сталь6	630	310			
	Сталь7	700	340			
Углеродистая качественная мартеновская сталь	Сталь20	510	260	$\sigma_{-1} = 0,33\sigma_B + 70$	$\tau_{-1} = 0,53\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1p} = 0,71\sigma_{-1}$
	Сталь25	550	280			
	Сталь30	580	300			
	Сталь35	620	320			
	Сталь40	660	340			
	Сталь45	700	360			
	Сталь50	730	380			
	Сталь55	760	400			
	Сталь60	780	420			
	Сталь65	800	430			
	Сталь70	820	440			
Углер.-марган. качеств. сталь	Сталь15Г	500	250	$\sigma_{-1} = 0,31\sigma_B + 70$	$\tau_{-1} = 0,54\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1p} = 0,73\sigma_{-1}$
	Сталь20Г	520	280			
	Сталь30Г	620	320			
	Сталь40Г	700	360			
	Сталь45Г	770	380			
	Сталь50Г	800	400			
	Сталь15Г2	560	210			

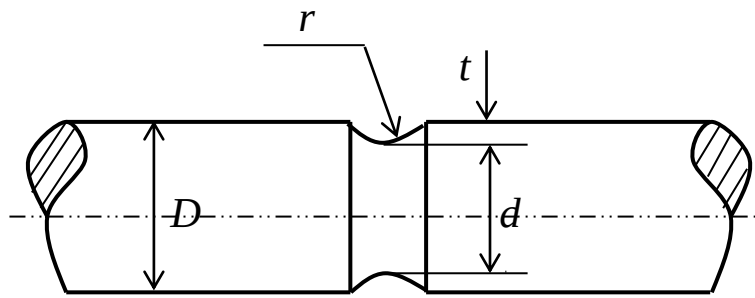
Продолжение таблицы П 8

1	2	3	4	5	6	7
Легированные стали	Ст.12Х2НЧА	1200	1000	$\sigma_{-1} = 0,30\sigma_B + 70$	$\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1p} = 0,77\sigma_{-1}$
	Ст.20ХН3А	950	800			
	Ст.20Х2НЧА	1400	1200			
	Ст.30ХН3А	1100	900			
	Ст.18ХГТ	1150	950			
	Сталь30ХГТ	1500	1300			
	Сталь35ХГТ	1150	950			
	Ст.40ХГТ	1250	1050			
	Сталь38ХЮ	950	800			
	Сталь30ХГС	1100	950			
	Ст. 35ХГСА	1050	1400			
	Сталь20ХГР	1000	800			
	Сталь40ХГР	1100	950			

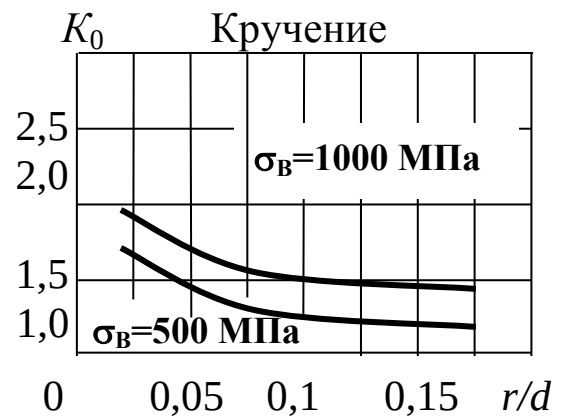
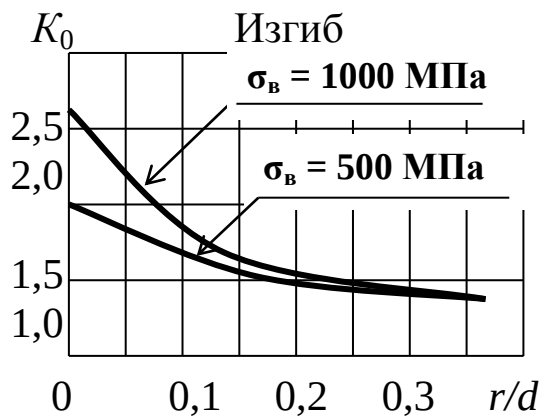
П 9. Шпоночный паз



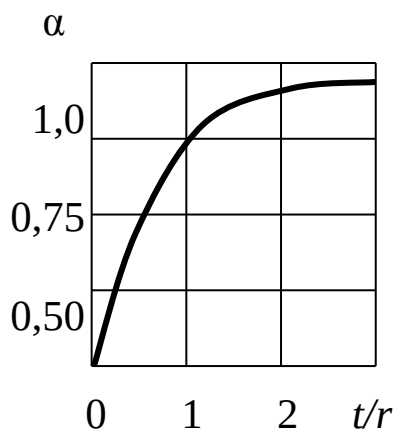
П 10. Проточка



Эффективный коэффициент концентрации для $t/r = 1$

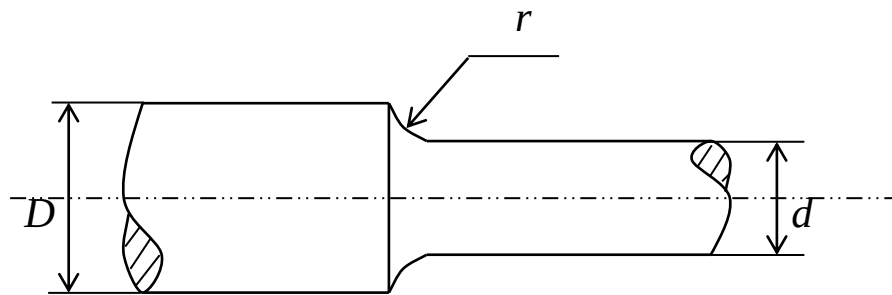


Поправочный коэффициент

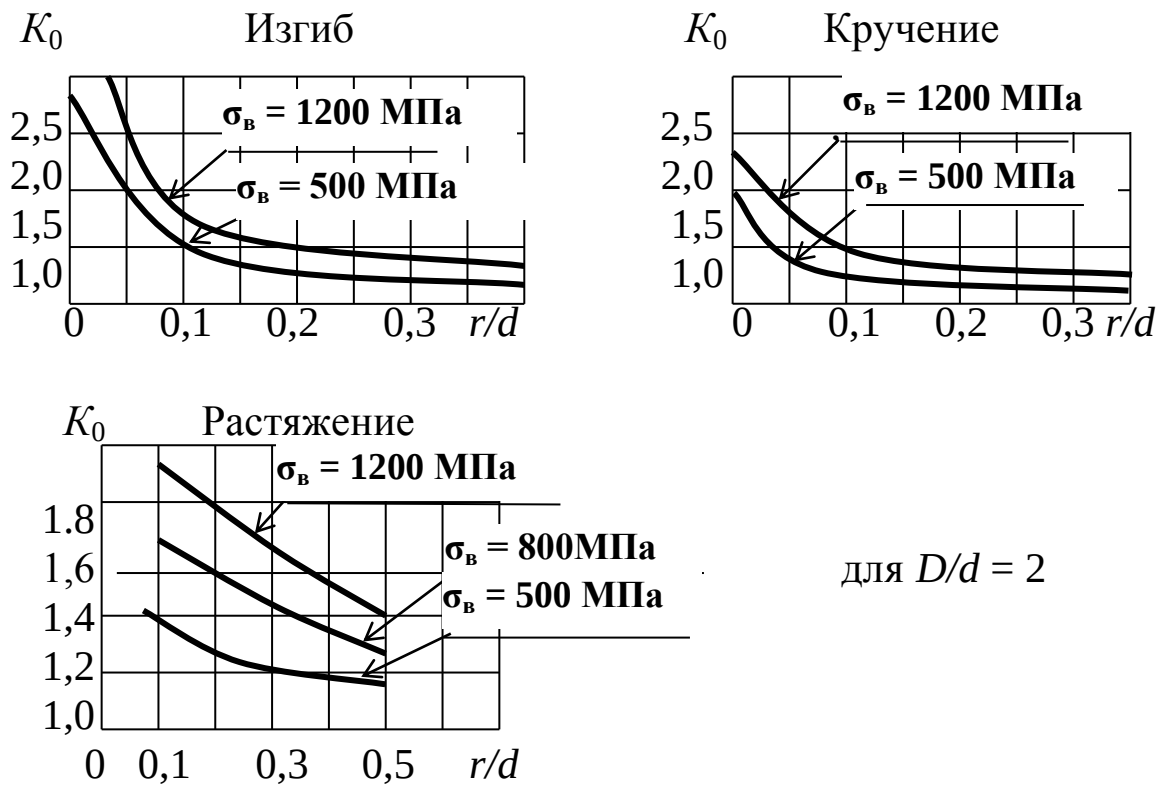


$$K = 1 + \alpha(K_0 - 1)$$

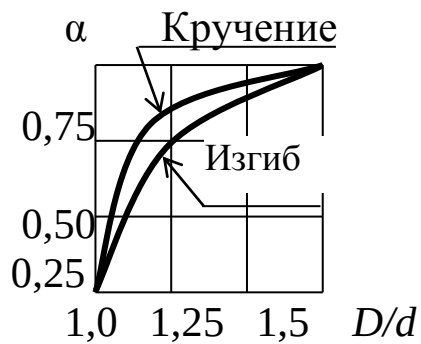
П 11. Галтель



Эффективный коэффициент концентрации

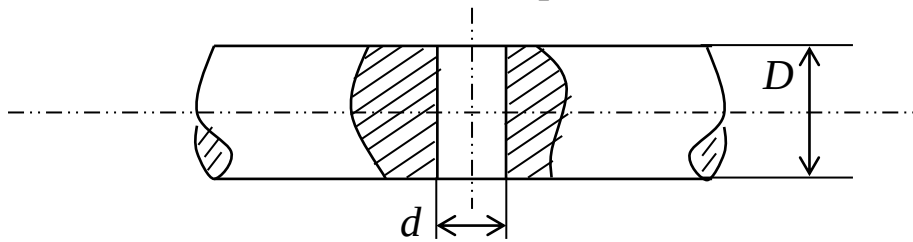


Поправочный коэффициент для учета D/d

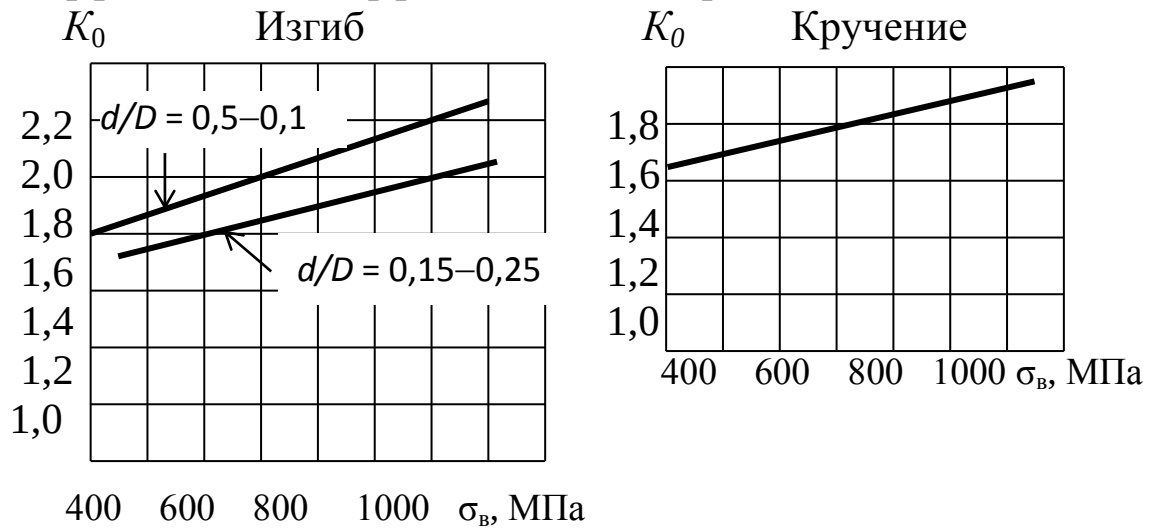


$$K = 1 + \alpha(K_0 - 1)$$

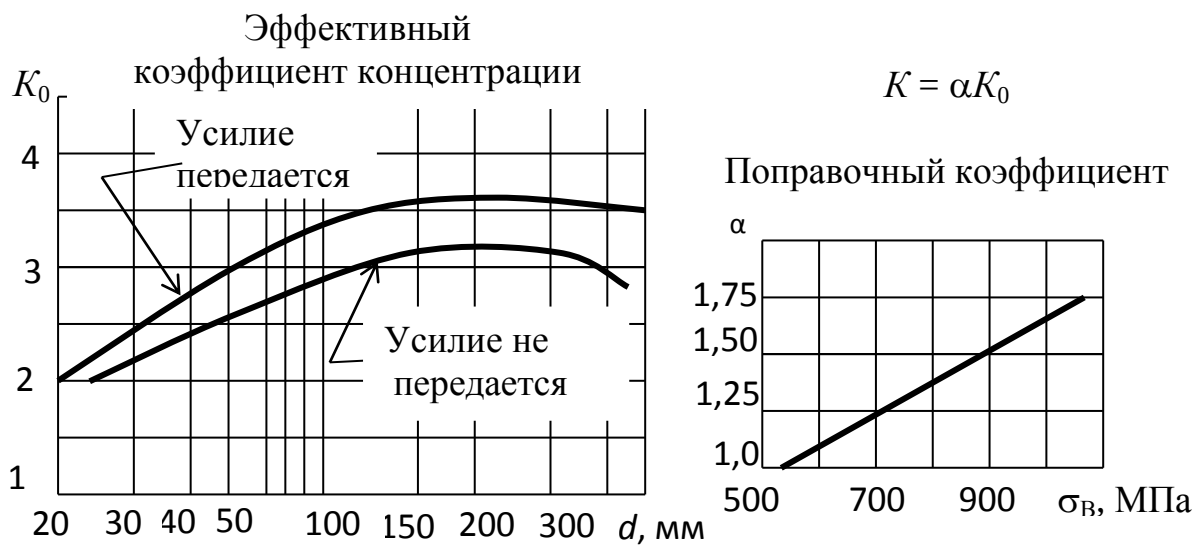
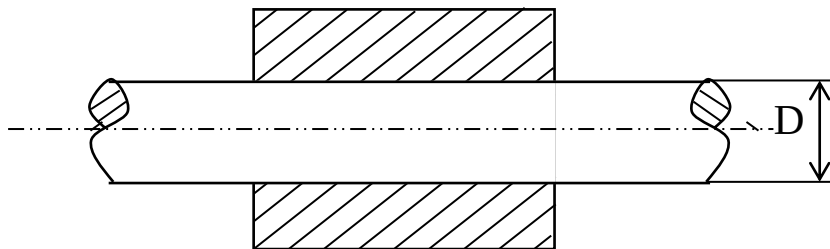
П 12. Отверстие



Эффективный коэффициент концентрации



П 13. Напрессовка



П 14. Детали машин

1.1. Значения КПД механических передач

Передача	КПД
Зубчатая в закрытом корпусе (редуктор): цилиндрическими колесами	0,97 – 0,98
коническими колесами	0,96 – 0,97
Зубчатая открытая	0,95 – 0,96
Червячная в закрытом корпусе при числе витков (заходов) червяка:	
$z_1 = 1$	0,70 – 0,75
$z_1 = 2$	0,80 – 0,85
$z_1 = 4$	0,85 – 0,95
Цепная закрытая	0,95 – 0,97
Цепная открытая	0,90 – 0,95
Ременная:	
плоским ремнем	0,96 – 0,98
клиновыми ремнями	0,95 – 0,97
Примечание. Потери на трение в опорах каждого вала учитываются множителем $\eta_0 = 0,99 \div 0,995$.	

1.2. Значения межосевого расстояния a_w и модуля m

Значения межосевого расстояния по ГОСТ 2185–66 (мм): 1-й ряд: 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500; 2-й ряд: 71, 90, 112, 140, 180, 224, 280, 355, 450, 560, 710, 900, 1120, 1400, 1800, 2240. Первый ряд следует предпочитать второму.
Значения модуля по ГОСТ 9563 – 60 (мм): 1-й ряд: 1; 1,25; 2; 2,5; 3; 4; 6; 8; 10; 12; 16; 20. 2-й ряд: 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 7; 9; 11; 14; 18; 22. Первый ряд следует предпочитать второму. Для косозубых колес стандартным модулем считают нормальный m_n. Для шевронных колес стандартным модулем может быть как нормальный m_n, так и окружной m_t.

1.3. Электродвигатели асинхронные серии 4А, закрытые обдуваемые (по ГОСТ 19523–81)

Мощность, кВт	Синхронная частота вращения, об/мин											
	3000			1500			1000			750		
	Типо-размер	$s, \%$	$\frac{T_n}{T_{\text{п}}}$	Типо-размер	$s, \%$	$\frac{T_n}{T_{\text{п}}}$	Типо-размер	$s, \%$	$\frac{T_n}{T_{\text{п}}}$	Типо-размер	$s, \%$	$\frac{T_n}{T_{\text{п}}}$
0,55	63B2	8,5		71A4	7,3		71B6	10		80B8	9	
0,75	71A2	5,9		71B4	7,5		80A6	8,4		90LA8	8,4	
1,1	71B2	6,3		80A4	5,4		80B6	8,0		90LB8	7,0	1,6
1,5	80A2	4,2		80B4	5,8		90L6	6,4		100L8	7,0	
2,2	80B2	4,3	2,0	90L4	5,1	2,0	100L6	5,1	2,0	112MA8	6,0	
3,0	90L2	4,3		100S4	4,4		112MA6	4,7		112M8	5,8	1,8
4,0	100S2	3,3		100L4	4,7		112MB6	5,1		132S8	4,1	
5,5	100L2	3,4		112M4	3,7		132S2	3,3		132M8	4,1	
7,5	112M2	2,5		132S4	3,0		132M6	3,2		160S8	2,5	1,4
11,0	132M2	2,3	1,6	132M4	2,8		160S6	2,7		160M8	2,5	
15	160S2	2,1		160S4	2,3		160M6	2,6		180M8	2,5	
18,5	160M2	2,1		160M4	2,2		180M6	2,7		200M8	2,3	
22	180S2	2,0		180S4	2,0		200M6	2,8		200L8	2,7	
30	180M2	1,9	1,4	180M4	1,9	1,4	200L6	2,1		225M8	1,8	1,2
37	200M2	1,9		200M4	1,7		225M6	1,8		250S8	1,5	
45	200L2	1,8		200LA	1,6		250S6	1,4	1,2	250M8	1,4	
55	225M2	1,8		225M4	1,4		250M6	1,3		280S8	2,2	
75	250S2	1,4		250S4	1,2	1,2	280S6	2,0		280M8	2,2	
90	250M2	1,4	1,2	250M4	1,3		280M6	2,0		315S8	2,0	1,0
110	280S2	2,0		280S4	2,3		315S6	2,0		315M8	2,0	

Примечания. 1. Пример условного обозначения электродвигателя мощностью 11 кВт, синхронная частота вращения 1500 об/мин.

Электродвигатель 4А132М4УЗ

2. Значения символов в условных обозначениях: цифра 4 указывает порядковый номер серии, буква А — род двигателя — асинхронный. Следующие за буквой А числа (двух- или трехзначные) соответствуют высоте оси вращения, мм; буквы L, S и М относятся к установочным размерам по длине станины; буквы А и В — условные обозначения длины сердечника статора. Цифры 2, 4, 6 и 8 означают число полюсов. Последние два знака УЗ показывают, что двигатель предназначен для эксплуатации в зоне умеренного климата.

3. В графе s указано скольжение, %; в графе $\frac{T_n}{T_{\text{п}}}$ даны значения отношения величин пускового и номинального вращающих моментов.

4. Габаритные и установочные размеры двигателей серии 4А даны в табл. П2.

3.2. Предел контактной выносливости при базовом числе циклов

Способ термохимической обработки зубьев	Средняя твердость поверхностей зубьев	Сталь	σ_{Hlimb} МПа
Нормализация или улучшение	$HB < 350$	Углеродистая и легированная	$2 HB + 70$
Объемная закалка	$HRC 38 - 50$		$18 HRC + 150$
Поверхностная закалка	$HRC 40 - 50$		$17 HRC + 200$
Цементация и нитроцементация	$HRC > 56$	Легированная	$23 HRC$
Азотирование	$HV 550 - 750$		1050

Примечание. Базовое число циклов N_{HO} определяют в зависимости от твердости стали, при твердости $HB < 200$ принимают $N_{HO} = 10^7$; при твердости $HB 200 - 500$ значение N_{HO} возрастает по линейному закону от 10^7 до $6 \cdot 10^7$.

3.3. Механические свойства сталей, применяемых для изготовления зубчатых колес

Марка стали	Диаметр заготовки, мм	Предел прочности σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Твердость HB (средняя)	Термообработка
45	100 – 500	570	290	190	Нормализация
45	До 90 90 – 120 Св. 120	780 730 690	440 390 340	230 210 200	Улучшение
30ХГС	До 140 Св. 140	1020 930	840 740	260 250	
40Х	До 120 120 – 160 Св. 160	930 880 830	690 590 540	270 260 245	
40ХН	До 150 150 – 180 Св. 180	930 880 835	690 590 540	280 265 250	

3.4. Значения коэффициента $K_{H\alpha}$
для косозубых и шевронных передач

Степень точности	Окружная скорость v , м/с				
	до 1	5	10	15	20
6	1	1,02	1,03	1,04	1,05
7	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12
8	1,06	1,09	1,13	—	—
9	1,1	1,16	—	—	—
Примечание. Для прямозубых колес $K_{H\alpha} = 1$.					

3.5. Значения коэффициента $K_{H\beta}$

$\psi_{bd} = \frac{b}{d_1}$	Твердость поверхности зубьев					
	$HB \leq 350$			$HB > 350$		
	I	II	III	I	II	III
0,4	1,15	1,04	1,0	1,33	1,08	1,02
0,6	1,24	1,06	1,02	1,50	1,14	1,04
0,8	1,30	1,08	1,03	—	1,21	1,06
1,0	—	1,11	1,04	—	1,29	1,09
1,2	—	1,15	1,05	—	1,36	1,12
1,4	—	1,18	1,07	—	—	1,16
1,6	—	1,22	1,09	—	—	1,21
1,8	—	1,25	1,11	—	—	—
2,0	—	1,30	1,14	—	—	—
Примечание. Данные, приведенные в столбце I, относятся к передачам с консольным расположением зубчатого колеса; II — к передачам с несимметричным расположением колес по отношению к опорам; III — к передачам с симметричным расположением.						

3.6. Значения коэффициента K_{Hv}

Передача	Твердость HV поверхности зубьев	Окружная скорость v , м/с			
		до 5	10	15	20
		Степень точности			
		8		7	
Прямозубая	< 350	1,05	—	—	—
	> 350	1,10	—	—	—
Косозубая и шев- ронная	< 350	1,0	1,01	1,02	1,05
	> 350	1,0	1,05	1,07	1,10

3.7. Значения коэффициента K_{Fv}

$\psi_{bd} =$ $= b/d_{w1}$	Твердость рабочих поверхностей зубьев							
	$HV \leq 350$				$HV > 350$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
0,2	1,00	1,04	1,18	1,10	1,03	1,05	1,35	1,20
0,4	1,03	1,07	1,37	1,21	1,07	1,10	1,70	1,45
0,6	1,05	1,12	1,62	1,40	1,09	1,18	—	1,72
0,8	1,08	1,17	—	1,59	1,13	1,28	—	—
1,0	1,10	1,23	—	—	1,20	1,40	—	—
1,2	1,13	1,30	—	—	1,30	1,53	—	—
1,4	1,19	1,38	—	—	1,40	—	—	—
1,6	1,25	1,45	—	—	—	—	—	—
1,8	1,32	1,53	—	—	—	—	—	—

Примечание. Данные в столбце I относятся к симметричному расположению зубчатых колес относительно опор; II — к несимметричному; III — к консольному при установке валов на шариковых подшипниках; IV — то же, но при установке валов на роликовых подшипниках.

3.8. Коэффициент Y_F , учитывающий форму зуба

Значения коэффициента Y_F даны в ГОСТ 21354–75 в виде графиков с учетом коэффициента смещения. Для зубчатых колес, выполненных без смещения, Y_F имеет следующие значения:

$Z \dots 17 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 70 \quad 80 \quad 100$ и более

$Y_F \dots 4,28 \quad 4,09 \quad 3,90 \quad 3,80 \quad 3,70 \quad 3,66 \quad 3,62 \quad 3,61 \quad 3,61 \quad 3,60$

3.9. Значения предела выносливости при отнулевом цикле изгиба $\sigma_{F\limb}^0$ и коэффициента безопасности $[S_F]'$

Марка стали	Термическая или термохимическая обработка	Твердость зубьев		$\sigma_{F\limb}^0$	$[S_F]$
		на поверхности	в сердцеvine		
40, 45, 50, 40ХН, 40ХФА	Нормализация, улучшение	HB 180-350		1,8 HB	1,75
40Х, 40ХН, 40ХФА	Объемная закалка	HRC 45-55		500-550	1,8
40ХН, 40ХН2МА	Закалка при нагреве ТВЧ	HRC 48-58	HRC 25-35	700	1,75
20ХН, 20ХН2МА, 12ХН2, 12ХН3А	Цементация	HRC 57-63	-	950	1,55
Стали, содержащие алюминий	Азотирование	HV 700-950	HRC 24-40	300+1,2 HRC сердцевины	1,75

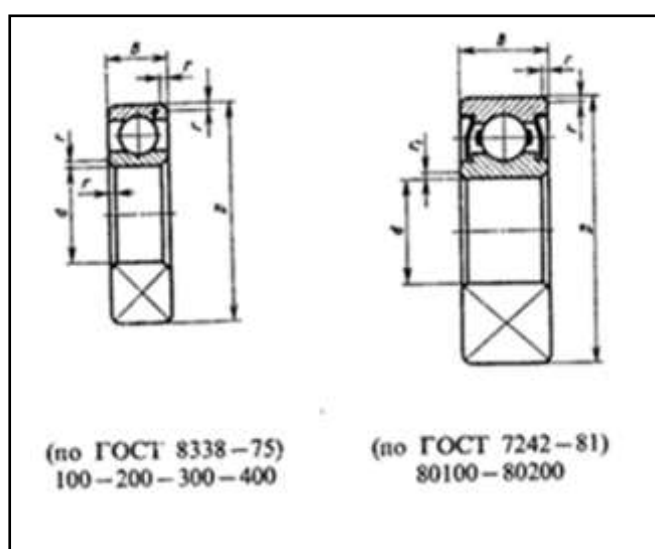
3.10. Ориентировочные значения коэффициента K_{Fv}

Степень точности	Твердость HB рабочей поверхности зубьев	Окружная скорость v , м/с		
		3	3-8	8-12,5
6	≤ 350	1/1	1,2/1	1,3/1,1
	> 350	1/1	1,15/1	1,25/1
7	≤ 350	1,15/1	1,35/1	1,45/1,2
	> 350	1,15/1	1,25/1	1,35/1,1
8	≤ 350	1,25/1,1	1,45/1,3	-/1,4
	> 350	1,2/1,1	1,35/1,2	-/1,3
Примечание. В числителе указаны значения K_{Fv} для прямозубых передач, в знаменателе – для косозубых.				

9.18. Значения X и Y для подшипников
Радиальные однорядные и двухрядные

$\frac{F_a}{C_o}$	$\frac{F_a}{VF_r} \leq e$		$\frac{F_a}{VF_r} \geq e$		e			
	X	Y	X	Y				
0,014	1	0	0,56	2,30	0,19			
0,028				1,99	0,22			
0,056				1,71	0,26			
0,084				1,55	0,28			
0,11				1,45	0,30			
0,17				1,31	0,34			
0,28				1,15	0,38			
0,42				1,04	0,42			
0,56				1,00	0,44			
Радиально-упорные конические и радиальные самоустанавливающиеся роликоподшипники								
Однорядные				Двухрядные				e
$\frac{F_a}{VF_r} \leq e$		$\frac{F_a}{VF_r} \geq e$		$\frac{F_a}{F_r} \leq e$		$\frac{F_a}{VF_r} \geq e$		
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	
1	0	0,4	$0,4 \operatorname{ctg} \alpha$	1	$0,45 \operatorname{ctg} \alpha$	0,67	$0,67 \operatorname{ctg} \alpha$	$1,5 \operatorname{tg} \alpha$

9.19. Шарикоподшипники радиальные однорядные



Продолжение табл. 9.19 (размеры в миллиметрах)

Условное обозначение		d	D	B	r	Грузоподъемность, кН	
						Динамическая C	Статическая C_0
Особолегкая серия							
100	-	10	26	8	0,5	4,62	1,96
101	-	12	28	8	0,5	5,07	2,24
104	80104	20	42	12	1	9,36	4,5
105	-	25	47	12	1	11,2	5,6
106	80106	30	55	13	1,5	13,5	6,8
107	-	35	62	14	1,5	15,9	8,5
108	80108	40	68	15	1,5	16,8	9,3
109	-	45	75	16	1,5	21,2	12,2
110	-	50	80	16	1,5	21,6	13,2
111	-	55	90	18	2	28,1	17
112	-	60	95	18	2	29,6	18,3
113	-	65	100	18	2	30,7	19,6
114	-	70	110	20	2	37,7	24,5
115	-	75	115	20	2	39,7	26,0
116	-	80	125	22	2	47,7	31,5
117	-	85	130	22	2	49,4	33,5
118	-	90	140	24	2,5	57,2	39,0
119	-	95	145	24	2,5	60,5	41,5
120	-	100	150	24	2,5	60,5	41,5
Легкая серия							
200	80200	10	30	9	1	5,9	2,65
201	80201	12	32	10	1	6,89	3,1
202	80202	15	35	11	1	7,8	3,55
203	80203	17	40	12	1	9,56	4,5
204	80204	20	47	14	1,5	12,7	6,2
205	80205	25	52	15	1,5	14,0	6,95
206	80206	30	62	16	1,5	19,5	10,0
207	-	35	72	17	2	25,5	13,7
208	80208	40	80	18	2	32,0	17,8
209	80209	45	85	19	2	33,2	18,6
209A	-	45	85	19	2	36,4	20,1
210	-	50	90	20	2	35,1	19,8
211	-	55	100	21	2,5	43,6	25,0
212	80212	60	110	22	2,5	52,0	31,0
213	80213	65	120	23	2Б5	56,0	34,0

Продолжение табл. 9.19 (размеры в миллиметрах)

214	-	70	125	24	2,5	61,8	37,5
215	80215	75	130	25	2,5	66Б3	41,0
216	-	80	140	26	3	70,2	45,0
217	-	85	150	28	3	83,2	53,0

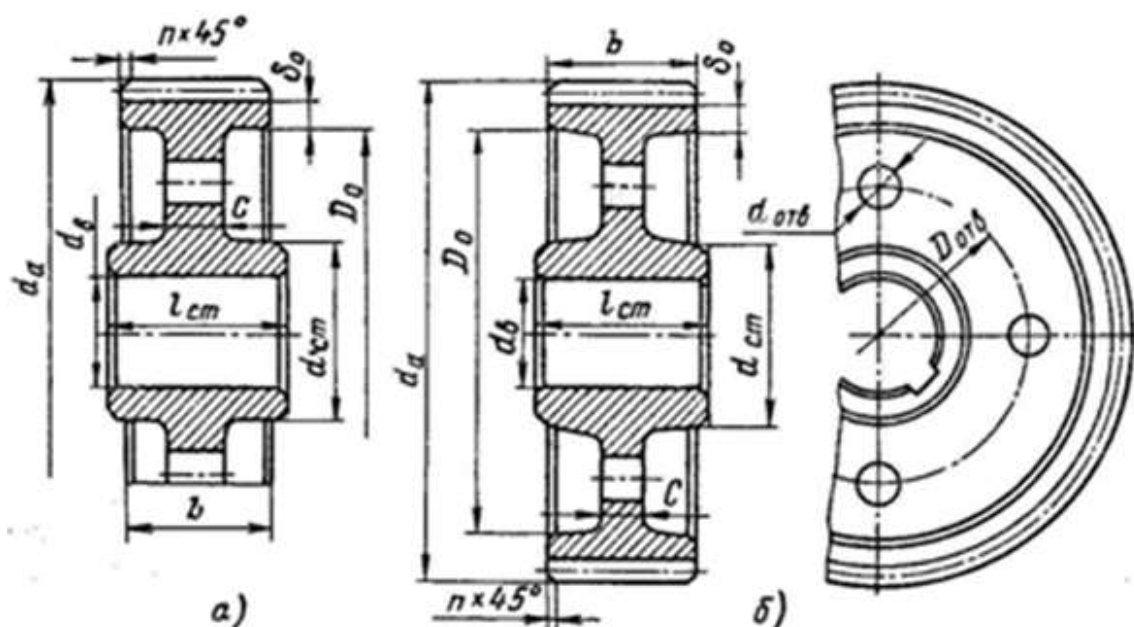


Рис. 10.1. Цилиндрические зубчатые колеса при $d_a \leq 500$ мм:
а – кованные; б – штампованные

10.1. Определение размеров зубчатых металлических колес (см. рис. 10.1)

Параметры	Формула
Диаметр ступицы стальных колес	$d_{ст} \approx 1,6d_B$
То же, чугунных колес	$d_{ст} \approx 1,8d_B$
Длина ступицы	$l_{ст} \approx (1,2 \div 1,5)d_B^*$
Толщина обода цилиндрических колес	$\delta_0 = (2,5 \div 4,0)m_n$
То же, конических колес	$\delta_0 = (3 \div 4)m_n$
Толщина диска кованных колес	$C = 0,3b$
То же, штампованных колес	$C = (0,2 \div 0,3)b$
>> литых колес	$C = 0,2b$
>> конических колес	$C = (0,1 \div 0,17)b$
Диаметр центральной окружности	$D_{отв} = 0,5(D_0 + d_{ст})$

Продолжение таблицы 10.1

Параметры	Формула
Диаметр отверстий (в шестернях малых размеров отверстий не делают) Толщина ребер Фаска	$d_{\text{отв}} \approx \left(\frac{D_0 - d_{\text{ст}}}{4} \right)$ $s = 0,8C$ $n = 0,5m_n$
*В массовом производстве цилиндрических колес при нарезании зубьев обрабатывают «пакетами» по два и более. При этом ступица не должна выступать за торец венца, т. е. $l_{\text{ст}} \leq b$. Обозначения: d_B – диаметр вала; m_n – модуль нормальный; m – средний окружной модуль; b – ширина венца; D_0 – утренный диаметр обода.	

10.8. Рекомендуемые значения вязкости масел для смазывания зубчатых передач при 50 °С

Контактные напряжения σ_H , МПа	Кинематическая вязкость, $10^{-6} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, при скорости скольжения, v_s , м/с		
	до 2	св. 2 до 5	св. 5
До 200	25	20	15
Св. 200 до 250	32	25	18
» 250 » 300	40	30	23

10.9 Рекомендуемые значения вязкости масел для смазывания червячных передач при 100 °С

Контактные напряжения σ_H , МПа	Кинематическая вязкость, $10^{-6} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, при скорости скольжения, v_s , м/с		
	до 2	св. 2 до 5	св. 5
До 200	25	20	15
Св. 200 до 250	32	25	18
» 250 » 300	40	30	23

10.2. Основные элементы корпуса из чугуна (см. рис. 10.18)

Параметры	Ориентировочные соотношения (размеры, мм)
Толщина стенки корпуса и крышки редуктора: одноступенчатого цилиндрического одноступенчатого конического одноступенчатого червячного двухступенчатого	Во всех случаях $\delta \geq 8$ мм и $\delta_1 \geq 8$ мм $\delta = 0,025a_{\text{в}} + 1$; $\delta_1 = 0,02a + 1$ $\delta = 0,05R_e + 1$; $\delta_1 = 0,04R_e + 1$ $\delta = 0,04a + 2$; $\delta_1 = 0,032a + 2$ $\delta = 0,025a_T + 3$; $\delta_1 = 0,02a_T + 3$
Толщина верхнего пояса (фланца) корпуса	$b = 1,5\delta$
Толщина нижнего пояса (фланца) крышки корпуса	$b_1 = 1,5\delta_1$
Толщина нижнего пояса корпуса: без бобышки при наличии бобышки	$p = 2,35\delta$ $p_1 = 1,5\delta$; $p_2 = (2,25 \div 2,75)\delta$
Толщина ребер основания корпуса	$m = (0,85 \div 1)\delta$
Толщина ребер крышки	$m_1 = (0,85 \div 1)\delta_1$
Диаметр фундаментных болтов (их число ≥ 4)	$d_1 = (0,03 \div 0,036)a_T + 12$; $d_1 = 0,072R_e + 12$
Диаметр болтов: у подшипников соединяющих основание корпуса с крышкой	$d_2 = (0,7 \div 0,75)d_1$; $d_3 = (0,5 \div 0,6)d_1$
Размеры, определяющие положение болтов d_2	$e \approx (1 \div 1,2)d_2$; $q \geq 0,5d_2 + d_4$; d_4 — крепление крышки подшипника
Высота бобышки h_6 под болт d_2	h_6 выбирают конструктивно так, чтобы образовалась опорная поверхность под головку болта и гайку. Желательно у всех бобышек иметь одинаковую высоту h_6

10.3. Дополнительные элементы корпуса из чугуна
(см. рис. 10.18)

Параметры		Ориентировочные соотношения (размеры, мм)							
Гнездо под под- шип- ник	Диаметр отверстия в гнезде	D_n — по наружному диаметру подшипника или стакана							
	Винты крепления крышки подшипника d_4 Число винтов n (предпочтительны врезные крышки без винтов)	M8 — M12 4 — 6							
	Диаметр гнезда Длина гнезда	$D_k = D_2 + (2 \div 5);$ D_2 — диаметр фланца крышки подшипника $l^* = \delta + c_2 + R_6 + (3 \div 5);$ $R_6 \geq 1,1 d_2$							
Размеры штифта	Диаметр Длина	$d_{ш} \approx d_3$ (размеры по табл. 10.5) $l_{ш} = b + b_1 + 5$							
Наименьший зазор между наружной поверхностью колеса и стенкой корпуса: по диаметру по торцам		$A \approx (1 \div 1,2) \delta$ $A_1 \approx A$ (на чертеже не показан)							
Параметры	Болты								
	M6	M8	M10	M12	M16	M20	M24	M27	M30
K_f	22	24	28	33	39	48	54	58	65
c_f	12	13	16	18	21	25	34	36	50

* Для удобства механической обработки торцов бобышек и проверки перекоса осей отверстий размер E обычно принимают одинаковым для всех опор, поэтому и размер l принимают для всех гнезд одинаковым.

10.10. Масла, применяемые для смазывания зубчатых и червячных передач

Сорт масла	Марка	Кинематическая вязкость, $10^{-6} \cdot \text{м}^2/\text{с}$
Индустриальное	И-12А И-20А И-25А И-30А И-40А И-50А И-70А И-100А	$\left. \begin{array}{l} 10-14 \\ 17-23 \\ 24-27 \\ 28-33 \\ 35-45 \\ 47-55 \\ 65-75 \\ 90-118 \end{array} \right\} \text{---} \text{---} \text{при } 50^\circ\text{C}$
Авиационное	МС-14 МК-22 МС-20	$\left. \begin{array}{l} 14 \\ 22 \\ 20,5 \end{array} \right\} \text{---} \text{---} \text{при } 100^\circ\text{C}$
Цилиндровое	52	44 – 59 при 100 °С

ЛИТЕРАТУРА

1. Хруничева, Т. В. Детали машин: типовые расчеты на прочность. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 224 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=988129>. – Загл. с экрана.

2. Молотников, В. Я. Техническая механика. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 476 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91295>. – Загл. с экрана.